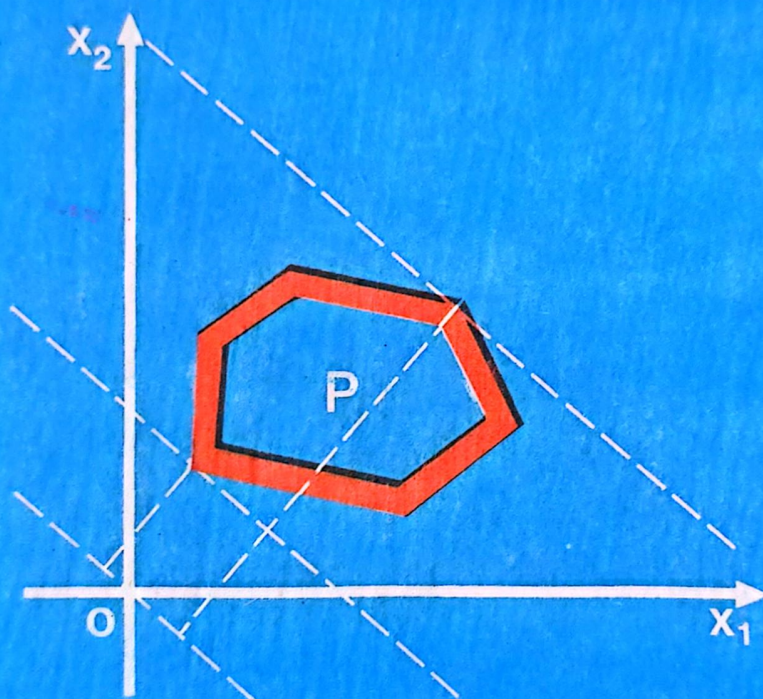


CERCHEZ MIHU

THEODOR DĂNEȚ

Probleme pentru aplicarea matematicii în practică



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI

CERCHEZ MIHU
conferențiar universitar

TEODOR DANEȚ
profesor

Probleme pentru aplicarea matematicii în practică

Ediția a IV-a



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI, 1982

Referenți: Prof. univ. GAVRIL SĂMBOAN
Conf. univ. CORNEL ZIDĂROIU

Redactor: Prof. VALENTIN RADU
Tehnoredactor: ANA ȚIMPĂU

INTRODUCERE

Ca și celelalte științe, matematica s-a născut din necesitățile practice ale omului, care s-au ivit pe diferite trepte de dezvoltare, în procesul muncii lui.

Contribuția matematicii la progresul științei și tehnicii este astăzi unanim recunoscută.

Exemplificarea acestui adevăr, la nivelul cunoștințelor teoretice primite în liceu, este o necesitate.

Scopul acestei lucrări este de a arăta modul în care unele noțiuni de matematici fundamentate teoretic se pot folosi la rezolvarea unor probleme practice.

În această nouă ediție o importanță deosebită a fost acordată *problemelor cu caracter economic*.

Printre acestea, un rol important îl are planificarea, urmărirea și analiza activității întreprinderilor, care au ca scop principal: *realizarea unui număr cât mai mare de bunuri materiale de tot felul, care să satisfacă nevoile mereu crescînde ale tuturor oamenilor muncii, cu minimum de efort și cu maximum de economii*.

Aceasta înseamnă că *productivitatea muncii* (care reprezintă cantitatea de produse realizate în unitate de timp) va trebui să crească necontenit, atît prin introducerea tehnicii noi în procesul de producție, cît și prin organizarea rațională a producției și creșterea calificării muncitorilor.

În același timp, ca o consecință a creșterii productivității muncii, precum și a altor măsuri care vor duce la economii de materiale și de manoperă, *prețul de cost* (costul exprimat în lei pe unitate de produs) va trebui să fie redus în mod continuu și progresiv, fără a diminua calitatea produselor și numărul sortimentelor.

Indicatorii¹ folosiți în planificare și în statistică se exprimă în unități fizice sau convenționale (m, m², m³, kg, t, kWh, bucăți, lei/bucată, tone/om zi, kg combustibil convențional etc.).

Majoritatea indicatorilor folosiți de fiecare întreprindere economică se schimbă de la o perioadă de timp la alta și se realizează la sfîrșitul perioadei planificate conform planului, peste plan sau sub plan.

Ei pot fi considerați din punct de vedere matematic, variabile independente sau funcții de una sau mai multe variabile, și sînt legați între ei prin relații simple care comportă operații elementare (de adunare, scădere, înmulțire și împărțire).

Pentru a cunoaște mărimea unui indicator rezultat dintr-o serie de mărimi date, în statistică și în planificare se folosesc diferite mărimi medii:

¹ Mărimile folosite în planificare și statistică poartă denumirea generală de indicatori.

aritmetice, armonice, geometrice, pătratic, simple sau ponderate (studiate în capitolul I).

În capitolul II au fost rezolvate și propuse câteva probleme de maxim și minim pe cale elementară, folosind unele teoreme deduse în capitolul I (la nivelul cunoștințelor din clasele 8–10).

Deoarece mărimea unui indicator poate crește sau descrește față de valoarea lui inițială, este necesar să cunoaștem modul de calcul al variației procentuale al unui indicator în cazul când expresia lui se prezintă sub forma unui produs, cît sau sume de doi sau mai mulți indicatori, care variază față de valorile lor inițiale cu anumite procente.

Astfel de probleme, întâlnite adesea în practică au fost studiate în capitolul III.

Pentru a putea urmări evoluția unui fenomen economic realizat în diferite perioade de timp, în capitolul IV au fost studiate și reprezentate graficele unor funcții cum ar fi: prețul de cost și productivitatea muncii în funcție de producție, variația numărului de cumpărători în funcție de timp, variația cheltuielilor de stocare în funcție de volumul stocului ș.a.

O gamă mult mai largă de probleme de maxim sau de minim au fost rezolvate cu ajutorul derivatelor (capitolul V).

În capitolul VI au fost date câteva aplicații practice ale calculului integral (aria și volumul corpurilor de rotație, capacitatea butoaielor, lungimea unor arce de curbă, centrele de greutate ale unor plăci plane) iar în capitolul VII au fost rezolvate câteva probleme practice de analiză combinatorie, construirea unor șabloane pentru croirea unor piese, unele aplicații în topografie, volumul unor corpuri geometrice mai puțin cunoscute dar foarte des întâlnite în practică: obeliscul, pana; probleme de interpolare și extrapolare (folosind polinomul de interpolare al lui Lagrange) ș.a.

Printre mijloacele care duc la executarea calculelor cu multă ușurință se află și nomogramele.

Construirea și modul de utilizare a unor nomograme simple este dat în capitolul VIII.

O atenție deosebită a fost acordată *programelor liniare* printre care *problema transporturilor* ocupă un loc central.

Data fiind importanța mereu crescîndă a metodelor cercetării operaționale, în ultimul capitol s-au introdus câteva metode elementare de *teoria grafurilor*.

Algoritmii expuși, care sînt simpli și ușor accesibili, permit soluționarea a numeroase probleme din cele mai diferite domenii de activitate, folosind: determinarea drumului de valoare sau de lungime optimă (maximă sau minimă), a fluxului maxim sau a drumului critic etc.).

Folosind metoda eliminării succesive (dată în anexă) am arătat cum se pot rezolva unele probleme de algebră liniară: discuția și rezolvarea sistemelor liniare, rangul unei matrice și matricea inversă a unei matrice pătrate nesingulare, valoarea unei funcții liniare, fără a folosi calcule greoaie cu *determinanți*, formulele lui Cramer sau *teroma* lui Rouché (care constituie de multă vreme piese de muzeu).

Credem că algebra liniară se poate dezvolta ușor, mai clar și mai profund, fără calcule cu determinanți. Este astăzi unanim recunoscut că determinantul nu se mai folosește decît în cazuri rare și atunci ca un concept abreviativ¹.

AUTORII

¹ A se vedea și articolul din revista belgiană „Nico” nr. 2/1969 și Gazeta matematică seria A nr. 2/1971 de acad. J. Dieudonné.

CAPITOLUL I.
MĂRIMI MEDII

§ 1. Calculul mărimilor medii

— Media aritmetică simplă (m_a)

Dacă notăm cu $x_1, x_2, \dots, x_n$, o serie de mărimi individuale, în general diferite între ele, ce caracterizează evoluția unui fenomen economic, tehnic, sau de altă natură, atunci media aritmetică m_a a acestor mărimi se obține cu formula:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad m_a = (\sum x_i) : n.$$

Mărimile $x_1, x_2, \dots, x_n$ pot reprezenta:

— producția realizată de un muncitor pe zi în cursul unei perioade de timp (de exemplu în cursul unei luni sau al unei decade), pentru a afla producția medie zilnică ce revine unui muncitor (exprimată în unități de producție pe zi, de exemplu bucăți/zi);

— numărul de hectare arate zilnic la o fermă agricolă într-o perioadă de timp, pentru a determina numărul mediu de hectare arate pe zi;

— numărul de vagoane-marfă încărcate zilnic într-o stație de cale ferată, pentru a afla media zilnică a încărcărilor în acea stație etc.

Probleme propuse

1. Producția realizată la extracția minereului de fier, în decursul unui cincinal, este dată în tabelul:

Anul	I	II	III	IV	V
Mii tone	1 500	1 900	2 400	3 200	4 000

Se cere producția medie anuală în acel cincinal. ($R: 2\,600$ mii tone).

2. Tabelul de mai jos reprezintă numărul de tractoare care au funcționat în 6 ani consecutivi:

Anul	I	II	III	IV	V	VI
Nr. bucăți	40 000	48 000	57 000	68 000	82 000	100 000

Care este numărul mediu anual de tractoare care au existat în acea perioadă și numărul de tractoare care au fost construite în medie pe an ($R : 71\ 000 ; 12\ 000$).

— Media aritmetică ponderată (m_{ap})

Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ o serie de mărimi individuale, iar $m_1, m_2, \dots, m_n$ numere care ne arată de câte ori se află mărimile $x_1, x_2, \dots, x_n$ în seria de mărimi date. Media aritmetică ponderată m_{ap} se calculează cu formula :

$$m_{ap} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} ; \quad m_{ap} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} .$$

Numerele $m_i : \sum m_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$; cu care se înmulțesc mărimile $x_1, x_2, \dots, x_n$ se numesc *ponderi*.

Media aritmetică ponderată se folosește în cazul în care, în seria de mărimi date unele mărimi se întâlnesc de mai multe ori. De fapt, media aritmetică ponderată se obține dintr-o medie aritmetică simplă, în care unele mărimi din serie se întâlnesc de mai multe ori. Cum o adunare repetată se poate înlocui cu o înmulțire, media aritmetică obținută devine medie aritmetică ponderată.

Exemplu. Un grup de 40, 20, 60 de vagoane au fost încărcate cu 16, 10, respectiv 14 t/vagon. Se cere tonajul mediu care revine pe o osie a unui vagon.

Folosind formula care ne dă media ponderată, se obține :

$$m_{ap} = \frac{40 \cdot 16 + 20 \cdot 10 + 60 \cdot 14}{40 + 20 + 60} = 14 \text{ t/vagon (sau 7 t/osie).}$$

Tonajul mediu care revine pe o osie este un indicator de o importanță deosebită în transportul pe calea ferată și poartă numele de *încărcătură statică pe osie*. Creșterea acestui indicator duce la depășirea tonajului fiecărui tren și deci la un volum mărit de transporturi cu același număr de trenuri.

Observație. Ponderarea se poate face nu numai cu mărimea absolută a ponderilor, ci și cu raportul procentual al fiecărei ponderi față de suma lor.

Aceasta este o consecință a faptului că formula care ne dă media aritmetică ponderată se mai poate scrie și sub forma :

$$m_{ap} = \frac{x_1 \frac{m_1}{\sum m_i} \cdot 100 + x_2 \frac{m_2}{\sum m_i} \cdot 100 + \dots + x_n \frac{m_n}{\sum m_i} \cdot 100}{100} ,$$

iar dacă notăm $\frac{m_i}{\sum m_i} \cdot 100 = p_i$ formula de mai sus devine :

$$m_{ap} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{100} = \frac{\sum x_i p_i}{100} .$$

Numerele $p_i : 100 \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, se numesc ponderi procentuale.

¹ Dacă $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1, m_{ap} = m_a$. Deci media aritmetică simplă m_a este un caz particular al mediei aritmetice ponderate m_{ap} .

De menționat că media aritmetică ponderată cu procente mărimilor date se aplică mai ușor în practică, fiind mai simplă, deoarece procente $p_1, p_2, \dots, p_n$ sînt, în general, numere de 2–3 cifre, iar numitorul formulei este egal cu 100 și deci împărțirea se face fără calcule.

Verificarea exactității calculelor unei medii aritmetice simple sau ponderate, se poate face cu ajutorul formulelor:

$$\Sigma(x_i - m_a) = 0; \quad \Sigma m_i(x_i - m_{ap}) = 0.$$

Probleme propuse

1. La o întreprindere de confecții s-au executat în cursul unei luni: 200 de costume de 800 lei costumul, 150 paltoane cu 1000 lei bucata și 120 pardesiuri cu 650 lei bucata.

Care este prețul de cost mediu al unei confecții la acea întreprindere.
(R: 825,50 lei/bucată).

2. La o fermă agricolă recolta de grâu s-a realizat astfel: 32 q/ha, pe un lot de 12 ha; 36 q/ha pe un lot de 10 ha, 38 q/ha pe un lot de 16 ha și 40 q/ha pe un lot de 8 ha. Care este recolta medie de grâu la hectar, provenită din cele 4 loturi?

(R: 36,34 q/ha).

3. În țara noastră puterea electrică instalată a crescut astfel: între anii 1925–1930 cu 14 000 kW/an, între anii 1931–1938 cu 16 000 kW/an, iar între anii 1939–1945 cu 18 000 kW/an. Care este creșterea medie anuală a puterii de energie electrică instalată în perioada 1925–1945?

(R: 15 111 kW/an).

4. Puterea electrică instalată a crescut după cum urmează: între anii 1949–1954 cu 120 000 kW/an, între anii 1955–1960 cu 150 000 kW/an, iar între anii 1961–1965 a crescut cu 400 000 kW/an. Care este creșterea medie anuală a puterii instalate în perioada 1949–1965?

(R: 218 750 kW/an).

— Media armonică simplă (m_h)

Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ reprezintă o serie de mărimi date, media armonică m_h a acestor mărimi se calculează cu formula:

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}; \quad m_h = \frac{n}{\Sigma \frac{1}{x_i}}$$

și este egală cu *inversa mediei aritmetice a inverselor mărimilor date*. În cazul particular $n = 2$, $n = 3$, media armonică se poate scrie sub forma:

$$m_h = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}; \quad m_h = \frac{3x_1x_2x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}$$

Exemplu. Prețul de cost al unui produs similar la trei fabrici diferite a fost 400, 500, respectiv 600 lei/bucată. Totalul cheltuielilor efectuate pentru realizarea acelei producții la fiecare din cele 3 fabrici a fost același.

Care este prețul de cost mediu al acelui produs la cele 3 fabrici?

Soluție. Dacă notăm cu C totalul cheltuielilor efectuate de fiecare din cele 3 fabrici și cu x_1, x_2, x_3 prețul de cost realizat la cele 3 fabrici, prețul de cost mediu c al acelui produs va fi :

$$c = \frac{\text{totalul cheltuielilor}}{\text{numărul produselor}} = \frac{C + C + C}{\frac{C}{x_1} + \frac{C}{x_2} + \frac{C}{x_3}} = \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}.$$

Se constată că prețul de cost mediu se obține calculând media armonică a celor 3 prețuri obținute la cele 3 fabrici.

Înlocuind pe x_1, x_2, x_3 cu valorile date, găsim :

$$m_h = \frac{3}{\frac{1}{400} + \frac{1}{500} + \frac{1}{600}} = \frac{36\,000}{74} = 486,50;$$

deci prețul de cost mediu va fi de 486,50 lei/bucată¹.

— *Media armonică ponderată (m_{hp})*

Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ o serie de mărimi date, iar $a_1, a_2, \dots, a_n$, n numere reale. Media armonică a mărimilor $x_1, x_2, \dots, x_n$ ponderate cu numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ este dată de formula :

$$m_{hp} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n}}; \quad m_{hp} = \frac{\sum a_i}{\sum \frac{a_i}{x_i}},$$

și este egală cu *inversa mediei aritmetice ponderate a inverselor mărimilor date*.

Numerele a_i ; $\sum a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, se numesc ponderi.

Exemplu. Retribuția medie lunară a unei categorii de muncitori dintr-o întreprindere pe cele 4 trimestre ale unui an a fost 2 400, 2 580, 2 700, respectiv 2 840 lei/lună, iar fondul de retribuții efectiv pe cele 4 trimestre a fost de 600 000, 720 000, 900 000, respectiv 960 000 lei/trimestru. Care a fost retribuția medie lunară a unui muncitor de la acea întreprindere, în cursul acelui an?

Dacă notăm cu $\bar{r}$ retribuția medie lunară, atunci :

$$\bar{r} = \frac{\text{fondul de retribuții anual}}{\text{numărul de lucrători}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} + \frac{a_4}{x_4}},$$

în care a_i reprezintă fondul de retribuții trimestrial, iar x_i retribuția medie lunară a unui muncitor pe cele 4 trimestre.

Deci, retribuția medie lunară se calculează cu ajutorul mediei armonice a retribuțiilor lunare, ponderate cu fondul de retribuții corespunzătoare celor 4 trimestre.

¹ Prețul de cost al aceluiasi produs diferă de la o întreprindere la alta, deoarece el depinde de modul de organizare a producției, de gradul de mecanizare a procesului de producție, de tipul de utilizare a mașinilor unelte, de randamentul acestor mașini, gradul de calificare al muncitorilor etc.

Dacă înlocuim pe a_i și x_i cu valorile date, se obține :

$$\begin{aligned}\bar{r} = m_{hp} &= \frac{600\,000 + 720\,000 + 900\,000 + 960\,000}{\frac{600\,000}{2\,400} + \frac{720\,000}{2\,580} + \frac{900\,000}{2\,700} + \frac{960\,000}{2\,840}} = \\ &= \frac{3\,180\,000}{1\,217} = 2\,612 \text{ lei/lună.}\end{aligned}$$

Observație. Ca și în cazul mediei aritmetice ponderate, ponderarea se poate face și cu raportul procentual al fiecărei ponderi față de suma lor.

În astfel de cazuri, ponderile $a_1, a_2, \dots, a_n$ vor fi exprimate în procente :

$$p_i = \frac{100a_i}{\sum a_i};$$

iar

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 100(a_1 + a_2 + \dots + a_n) : \sum a_i = 100,$$

și deci :

$$m_{hp} = \frac{100}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2} + \dots + \frac{p_n}{x_n}} = \frac{100}{\sum \frac{p_i}{x_i}}.$$

Exemplu. La o fermă agricolă, producția de grâu la hectar a fost realizată astfel :

— pe 60% din suprafața cultivată, producția a fost depășită cu 20% față de plan;

— pe 30,5%, producția a fost depășită cu 25% față de plan;

— pe 9,5%, producția a fost realizată cu 5% sub plan.

Care este procentul mediu cu care a fost depășită producția de grâu la hectar la acea fermă agricolă?

Soluție. Cunoscând procentele de variație a planului, p_i , coeficienții de realizare c_i se vor calcula cu formula :

$$c_i = 1 + \frac{p_i}{100}.$$

În exemplul dat se va găsi :

$$c_1 = 1 + 0,20 = 1,20; \quad c_2 = 1 + 0,25 = 1,25; \quad c_3 = 1 - 0,05 = 0,95$$

(deoarece 5% sub plan înseamnă $p_3 = -5$).

Cunoscând coeficienții parțiali c_1, c_2, c_3 de realizare a planului, coeficientul mediu de realizare a planului global se va obține cu ajutorul mediei armonice a coeficienților parțiali de realizare, ponderați cu procentele corespunzătoare celor trei suprafețe față de suprafața totală :

$$\bar{c} = \frac{100}{\frac{60}{1,2} + \frac{30,5}{1,25} + \frac{9,5}{0,95}} = \frac{100}{84,4} = 1,1825;$$

iar procentul mediu de depășire va fi :

$$\bar{p} = 100(\bar{c} - 1) = 100(1,1825 - 1) = 18,25\%.$$

Deci la acea fermă agricolă planul producției la grâu a fost depășit cu 18,25%.

Probleme propuse

1. În cursul unui an, retribuițiile unui grup de tehnicieni, ingineri și economiști ai unei întreprinderi au fost majorate astfel : 20% din totalul retribuițiilor au fost majorate cu 25%, 42% cu 20% și 38% cu 15%.

Se cere coeficientul și procentul mediu de majorare a retribuițiilor acelui grup.

Indicație : Se vor calcula mai întâi coeficienții medii parțiali de majorare a retribuițiilor și se va găsi : $x_1 = 1,25$; $x_2 = 1,20$; $x_3 = 1,15$; apoi, folosind media armonică ponderată, se va găsi : $\bar{x} = 1,19$ sau $\bar{p} = 19\%$.

2. Producția globală realizată la 3 întreprinderi a fost de : 1 200, 2 800, respectiv 3 900 mii lei în cursul unei luni, iar coeficienții de îndeplinire a planului au fost : 1,2 ; 1,4 ; respectiv 1,3.

Care este coeficientul și procentul mediu de îndeplinire a planului global la acest grup de întreprinderi ?

Indicație : Cum $\bar{c}_i = P_i : P_p$, rezultă $P_p = P_i : \bar{c}_i$; $i = 1, 2, 3$; iar coeficientul mediu $\bar{c}$ se va obține din formula :

$$\bar{c} = \frac{\text{producția realizată}}{\text{producția planificată}} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_1 : \bar{c}_1 + P_2 : \bar{c}_2 + P_3 : \bar{c}_3}$$

se va găsi $\bar{c} = 1,316$; deci $\bar{p} = 31,6\%$.

— *Media geometrică simplă* (m_g).

Fie $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ o serie de mărimi date¹. Fiecare din ele vor prezenta în general, o majorare sau o reducere față de mărimea precedentă (în anumite cazuri particulare, unele mărimi pot fi și egale între ele).

Dacă notăm cu x_i raportul dintre mărimea a_i față de mărimea precedentă a_{i-1} , (sau coeficientul de variație) se pot scrie relațiile :

$$x_1 = \frac{a_1}{a_0} ; \quad x_2 = \frac{a_2}{a_1} ; \quad x_3 = \frac{a_3}{a_2} , \dots , \quad x_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} .$$

Înmulțind aceste relații se obține :

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = \frac{a_n}{a_0} . \quad (1)$$

¹ Exemple : Producția realizată la o întreprindere pe o perioadă dată de timp, prețul de cost al unui produs ; în general, mărimea unui indicator economic realizat (sau planificat) în diferite perioade de timp etc. Prin natura lor mărimile a_i sînt strict pozitive : $a_i > 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Dacă vom presupune că variația acestor mărimi este uniformă și egală cu $\bar{x}$, relația (1) devine:

$$\bar{x}^n = \frac{a_n}{a_0}; \quad x = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}, \quad (2)$$

sau, dacă ținem seama de (1):

$$\bar{x} = m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}. \quad (3)$$

Se constată că modul de variație a mărimilor $a_0, a_1, \dots, a_n$ (sau coeficientul mediu de variație $\bar{x}$) este egal cu media geometrică a coeficienților de variație a fiecărei mărimi față de mărimea precedentă. Procentul mediu de variație a mărimilor $a_0, a_1, \dots, a_n$ este $\bar{p} = 100(\bar{x} - 1)$.

În practică se va folosi formula (2) sau (3), după cum se cunoaște seria de mărimi absolute $a_0, a_1, \dots, a_n$ sau numai coeficienții de variație ai acestor mărimi $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Pentru calculul efectiv al mediei geometrice se aplică logaritmi în (2) sau (3)

$$\lg \bar{x} = (\lg a_n - \lg a_0) : n = b; \quad \bar{x} = \text{anti } \lg b, \quad (2')$$

$$\lg \bar{x} = (\lg x_1 + \dots + \lg x_n) : n = b; \quad \bar{x} = \text{anti } \lg b. \quad (3')$$

Exemple: 1. Producția de tractoare pe o perioadă de 5 ani este dată în tabela de mai jos:

Anul	I	II	III	IV	V
Numărul de bucăți	4 000	6 000	7 500	9 000	11 700
Coeficientul de variație	1	1,5	1,25	1,20	1,30

Care este procentul mediu de creștere a numărului de tractoare în acest interval de timp?

Soluție. Deoarece seria mărimilor este cunoscută, ritmul mediu de variație va fi dat de formula:

$$\bar{x} = \sqrt[4]{\frac{11\,700}{4\,000}}$$

$$\lg \bar{x} = (\lg 11\,700 - \lg 4\,000) : 4 = 0,1145;$$

$$\bar{x} = \text{anti } \lg 0,1145 = 1,307; \text{ iar } \bar{p} = 100(\bar{x} - 1) = 100(1,307 - 1) = 30,7\%.$$

Producția de tractoare a crescut în medie cu 30,7% în fiecare an față de anul precedent.

2. Puterea instalată în centralele electrice crește anual în medie cu 16%. Se cere puterea instalată la sfârșitul unei perioade de 5 ani, știind că la început ea a fost de $16 \cdot 10^6$ kW.

Soluție. Coeficientul mediu de creștere anuală va fi :

$$\bar{c} = 1 + \frac{\bar{p}}{100} = 1 + \frac{16}{100} = 1 + 0,16 = 1,16,$$

iar puterea instalată la sfârșitul perioadei se va obține din formula (2) :

$$a_6 = a_0 \bar{c}^6 = 1,16^6 \cdot 16 \cdot 10^6 ;$$

$$\lg a_6 = 6 \lg 1,16 + \lg 16 + 6 = 7,59288.$$

$$a_6 = 39 \cdot 16 \cdot 10^6 \text{ kW}$$

și prezintă o creștere de

$$\bar{p} = 100 \left(\frac{39,16}{16} - 1 \right) = 144\%.$$

3. Prețul de cost al unui produs a scăzut de la 1 500 la 1 000 lei, ca urmare a 4 reduceri consecutive.

Care a fost ritmul mediu de reducere a prețului de cost la acel produs ?

Soluție. Folosind formula (2), se obține coeficientul mediu de reducere $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \sqrt[4]{1000 : 1500} = \sqrt[4]{2 : 3}.$$

Se va găsi $\bar{x} = 0,9036$; iar procentul mediu de variație va fi $\bar{p} = 100(\bar{x} - 1) = -9,64\%$. Cum $\bar{p} < 0$, prețul de cost a fost redus în medie cu 9,64% la fiecare din cele 4 reduceri consecutive.

4. Costul unui produs în valoare de 1 000 lei a suferit 5 reduceri consecutive, de 5%, 8%, 10%, 15%, 20%.

Care este procentul mediu de reducere a prețului de cost al acelui produs și costul lui final ?

Soluție. Se determină coeficienții medii de reducere cu formula :

$$x_i = 1 + p_i : 100 ; \quad x_1 = 1 - 5 : 100 = 0,95 ; \quad x_2 = 0,92 ; \quad x_3 = 0,90 ;$$

$$x_4 = 0,85 ; \quad x_5 = 0,80.$$

Formula (3) ne va da apoi coeficientul mediu de variație

$$\bar{x} = \sqrt[5]{0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,90 \cdot 0,85 \cdot 0,80} ;$$

$$\bar{x} = 0,8823 ; \quad \bar{p} = 100(\bar{x} - 1) = 88,23 - 100 = -11,77\%.$$

Cum $\bar{p} < 0$, rezultă că prețul de cost s-a redus în medie cu 11,77% la fiecare din cele 5 reduceri consecutive.

Calculul costului final

Cum seria de mărimi date $a_0, a_1, \dots, a_n$ se poate scrie și sub forma :

$$a_0, a_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right), a_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2, \dots, a_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n,$$

prețul de cost final după n reduceri consecutive va fi :

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{1}{100}\right)^n.$$

În exemplul dat, avem :

$$a_5 = a_0 \left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right)^5 = 1000 \left(1 - \frac{11,77}{100}\right)^5 = 535.$$

După cele 5 reduceri consecutive costul final va fi de 535 lei.

— *Media geometrică ponderată (m_{gp}).*

Dacă $r_1, r_2, \dots, r_n$ sînt n numere reale strict pozitive, media geometrică ponderată m_{gp} este dată de formula :

$$m_{gp} = \sqrt[r]{x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots \cdot x_n^{r_n}}; r = r_1 + r_2 + \dots + r_n.$$

Dacă $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$; $r = 1 + 1 + \dots + 1 = n$ și se obține media geometrică simplă a n numere $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

— *Media pătratică.*

Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$, reprezintă elementele unei colectivități statistice formată din n elemente și $\bar{x}$ media lor aritmetică, atunci diferențele :

$$x_1 - \bar{x}; x_2 - \bar{x}; \dots x_n - \bar{x};$$

dintre fiecare element x_i și media lor aritmetică $\bar{x}$ se numesc abateri de la media lor aritmetică.

Pentru a calcula media acestor abateri se folosește media aritmetică a pătratelor abaterilor² de la media aritmetică și se calculează cu formula :

$$D(\bar{x}) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Media aritmetică a pătratelor abaterilor se notează cu litera D și poartă numele de DISPERSIE.

Abaterea medie pătratică se notează de obicei cu litera σ , și este egală cu rădăcina pătrată a dispersiei :

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Abaterea medie pătratică este o mărime statistică care se exprimă în aceleași unități ca și elementele x_i ale colectivității statistice.

Observații. Dacă abaterile $|x_i - \bar{x}|$ sînt mici, aceasta înseamnă că seria de mărimi x diferă puțin de media lor aritmetică. În astfel de cazuri

¹ O mulțime de obiecte, ființe, lucruri, fenomene, formează o colectivitate statistică dacă ele posedă unele caracteristici comune.

² deoarece media aritmetică a abaterilor este nulă.

și pătratele acestor abateri $(x_i - \bar{x})^2$ vor fi mici, deci și media aritmetică a pătratelor abaterilor adică dispersia D , precum și abaterea medie pătratică adică σ vor fi de asemenea mici.

Dacă abaterile vor fi mari, atunci și abaterea medie pătratică σ va fi mare.

De aceea, *abaterea medie pătratică* reprezintă un indicator important al unei colectivități statistice; ea ne indică *oscilația* sau *diversitatea distribuției* elementelor x_i din colectivitatea statistică pe care o studiem.

Aplicație. Se cunosc prețurile de cost ale unui produs similar la 5 fabrici diferite: $A_1, A_2, \dots, A_5$. Se cere să se calculeze dispersia $D(x_i)$, precum și abaterea medie pătratică σ , folosind datele din tabela de mai jos.

Vom calcula succesiv:

Denumirea întreprinderii	Prețul de cost (x_i) lei/buc.	Abaterea de la media aritmetică $x_i - \bar{x}$	Pătratul abaterilor $(x_i - \bar{x})^2$
A_1	40	-28	784
A_2	60	-8	64
A_3	75	7	49
A_4	85	17	289
A_5	80	12	144
Total	340	0	1330

— media aritmetică a mărimilor x_i :

$$\bar{x} = \Sigma x_i : 5 = 340 : 5 = 68;$$

— abaterile de la media aritmetică, adică diferențele $x_i - \bar{x}$;

$$40 - 68 = -28; 60 - 68 = -8; 75 - 68 = 7; 85 - 68 = 17; 80 - 68 = 12;$$

trecute în coloana 3;

— pătratele abaterilor $(x_i - \bar{x})^2$, trecute în coloana 4;

— media aritmetică a pătratelor, adică dispersia:

$$D(\bar{x}) = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{1330}{5} = 266;$$

— abaterea medie pătratică:

$$\sigma = \sqrt{D(\bar{x})} = \sqrt{266} \approx 16,31.$$

Rezultă că abaterea medie de la prețul de cost este de 16,31 lei.

O b s e r v a Ț i e. Deoarece dispersia se poate scrie și sub forma :

$$D(\tilde{x}) = \frac{\sum (x_i - \tilde{x})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{2\tilde{x} \sum x_i}{n} + \frac{n\tilde{x}^2}{n} =$$

$$= \tilde{x}_i^2 - 2\tilde{x}_i\tilde{x} + \tilde{x}^2 = \tilde{x}_i^2 - \tilde{x}^2,$$

în practică se va folosi formula mai simplă :

$$D(\tilde{x}) = \tilde{x}_i^2 - \tilde{x}^2. \quad (4)$$

Dispersia este egală cu diferența dintre *media aritmetică* a pătratelor elementelor x_i și *pătratul mediei aritmetice* a acelor elemente.

Pentru sistematizarea calculelor se poate folosi tabela de mai jos :

Nr. crt. (1)	x_i (2)	x_i^2 (3)	$\tilde{x}$ (4)	$\tilde{x}^2$ (5)	$\tilde{x}_i^2$ (6)	$\tilde{x}_i^2 - \tilde{x}^2$ (7)
1	40	1 600				
2	60	3 600				
3	75	5 625				
4	85	7 225				
5	80	6 400				
Total	340	24 450	68	4 624	4 890	266

- în coloana 2 se trec elementele $x_1, x_2, \dots, x_5$;
- în coloana 3 se trec pătratele lor x_i^2 ;
- calculăm media aritmetică ($\tilde{x}$) a elementelor x_i și pătratul ei :

$$\tilde{x} = \sum x_i : 5 = 340 : 5 = 68; \tilde{x}^2 = 68^2 = 4624;$$

— calculăm media aritmetică a pătratelor elementelor x_i , folosind datele din coloana 3 :

$$\tilde{x}_i^2 = \frac{40^2 + 60^2 + 75^2 + 85^2 + 80^2}{5} = \frac{24\,450}{5} = 4890,$$

și se trece în coloana (6) :

— calculăm apoi dispersia, folosind formula (4) :

$$D(x_i) = \tilde{x}_i^2 - \tilde{x}^2 = 4890 - 4624 = 266,$$

care se trece în coloana (7).

Practic, coloanele (4), (5), (6), (7) pot fi suprimate reținând numai rezultatele din ultima linie.

$$\tilde{x} = 68; \tilde{x}^2 = 4624; \tilde{x}_i^2 = 4890; D = \tilde{x}_i^2 - \tilde{x}^2 = 266.$$

— Media pătratică simplă (m_p).

Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt n numere variabile, media pătratică simplă (m_p) se calculează cu formula:

$$m_p = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}.$$

— Media pătratică ponderată (m_{pp}).

Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt n numere reale date, strict pozitive, iar $x_1, x_2, \dots, x_n$, n numere variabile, media pătratică ponderată (m_{pp}) se calculează cu formula¹:

$$m_{pp} = \sqrt{\frac{a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}} = \sqrt{\frac{\sum a_i x_i^2}{\sum a_i}};$$

numere a_i ; $\sum a_i > 0$, se numesc ponderi.

Dacă notăm:

$$a_i : \sum_1^n a_i = p_i; \quad \sum_1 p_i = 1;$$

media pătratică ponderată se va scrie:

$$m_{pp} = \sqrt{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2} = \sqrt{\sum p_i x_i^2}.$$

Media pătratică simplă (m_p) și media pătratică ponderată (m_{pp}) se numesc medii de ordin doi.

— Media cubică simplă.

$$m_c = \sqrt[3]{\frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3}{n}} = \sqrt[3]{\frac{\sum x_i^3}{n}}.$$

— Media cubică ponderată.

$$m_{cp} = \sqrt[3]{\frac{a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + \dots + a_n x_n^3}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}} = \sqrt[3]{\frac{\sum a_i x_i^3}{\sum a_i}}.$$

Dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, se obține media cubică simplă, care este deci un caz particular al mediei cubice ponderate.

Media cubică simplă și ponderată se mai numesc și medii de ordinul 3.

— Media simplă de ordinul r ($r \in \mathbb{N}$).

$$m_r = \sqrt[r]{\frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{n}} = \sqrt[r]{\frac{\sum x_i^r}{n}}. \quad (5)$$

¹ dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, se obține media pătratică simplă.

— Media ponderată de ordinul r .

$$m_{pr} = \sqrt[r]{\frac{a_1 x_1^r + a_2 x_2^r + \dots + a_n x_n^r}{n}} = \sqrt[r]{\frac{\sum a_i x_i^r}{n}}. \quad (6)$$

Dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, se obține media simplă de ordinul r , care este deci un caz particular al mediei ponderate de ordinul r ($r \in \mathbb{N}$).

Observații. Dacă în (5) facem $r=1, 2, 3, \dots, k$, se obțin mediile simple: aritmetice (m_a), pătratice (m_p), cubice (m_c), ..., de ordinul k (m_k).

Dacă în (6) facem $r=1, 2, 3, \dots, k$, se obțin mediile ponderate: aritmetice (m_{ap}), pătratice (m_{pp}), cubice (m_{cp}), ..., de ordinul k (m_{pk}).

La care se mai adaugă mărimile medii studiate mai înainte:

— media geometrică simplă (m_g), media geometrică ponderată (m_{gp});

— media armonică simplă (m_h), media armonică ponderată (m_{hp}).

Probleme propuse

1. În cinci ani consecutivi, producția în transportul de mărfuri pe calea ferată exprimată în tone·km¹ a prezentat următorii coeficienți de variație de la un an la altul:

Anul	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
Coeficientul de variație	1	1,18	1,11	1,21	1,001	1,12

Care a fost ritmul mediu anual de variație a producției în transportul feroviar în acea perioadă de 5 ani?

R: Se va folosi formula (3); se va găsi $\bar{c} = 1,122$ sau $\bar{p} = 12,20\%$.

2. Care va fi ritmul mediu anual de reducere a prețului de cost la o categorie de produse, dacă se prevede ca în decurs de 5 ani să scadă cu 30%?

R: 6,88% în fiecare an față de anul precedent.

3. În decurs de 5 ani producția de hîrtie a crescut de la $125 \cdot 10^3$ t la $375 \cdot 10^3$ t (adică de 3 ori). Care este ritmul mediu de creștere anuală a producției de hîrtie în această perioadă?

R: Se va folosi formula $a_n = a_0 \left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right)^n$, în care $a_n = 3 a_0$; $n = 5$; $\bar{p} = 100(\sqrt[5]{3} - 1) = 24,57\%$.

¹ Producția în transportul de mărfuri pe calea ferată evaluată în tone·km rezultă din cantitățile de mărfuri exprimate în tone, înmulțite cu distanța parcursă în km; 200 t transportate pe o distanță de 300 km ne va da $200 \cdot 300 = 60\,000$ tone·km. Calculul acestui indicator se face cu formula:

$$\sum_{i=1}^n t_i \cdot d_i = t_1 \cdot d_1 + t_2 \cdot d_2 + \dots + t_n \cdot d_n.$$

4. Se cere coeficientul și procentul mediu de creștere lunară a producției la o întreprindere de textile, cunoscând următoarele date :

Luna	Producția globală (lei)	Coeficientul de creștere față de luna precedentă
Ianuarie	300 000	—
Februarie	330 000	1,10
Martie	396 000	1,20
Aprilie	495 000	1,25
Mai	643 500	1,30
Iunie	842 985	1,30

R: Se poate aplica și formula (2) și (3); în ambele cazuri se va găsi:
 $\bar{c} = 1,23$ sau $\bar{p} : 23\%$.

5. Care este ritmul mediu de variație a producției la o întreprindere industrială pentru care s-a prevăzut ca după $\bar{n}$ ani producția inițială Q_0 să devină egală cu Q_n ?

Indicație: Dacă se presupune ritmul mediu de variație uniform și egal cu $p\%$ din producția anului precedent, atunci:

$$Q_n = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n; \text{ iar } p = 100 (\sqrt[n]{Q_n : Q_0} - 1).$$

Producția a crescut, s-a redus, sau a rămas neschimbată față de producția inițială, după cum $p > 0$, $p < 0$, sau $p = 0$.

6. O întreprindere industrială trebuie să realizeze într-o perioadă de 6 ani, 100 000 piese.

Se știe că la sfârșitul primului an existau 44 000, iar în cursul celui de al doilea an au mai fost confecționate 8 000. Se cere ritmul mediu de creștere al numărului de piese de la un an la altul în perioada ultimilor 5 ani.

Indicație: Dacă se notează cu x coeficientul mediu de creștere de la un an la altul, se obține ecuația:

$$44\,000 + 8\,000 + 8\,000x + 8\,000x^2 + 8\,000x^3 + 8\,000x^4 = 100\,000,$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 7,$$

care se poate scrie:

$$(x^5 - 1) : (x - 1) = 7; x^5 - 7x + 6 = 0. \quad (7)$$

Scrisă sub această formă, ecuația (7) admite rădăcina străină $x = 1$.
Celelalte rădăcini le vom obține folosind șirul lui Rolle:

$$P(x) = x^5 - 7x + 6 = 0; \quad P'(x) = 5x^4 - 7 = 0;$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{7:5} \approx \pm 1,1.$$

x		$-\infty$	$-1,1$	$1,1$	$1,2$	$+\infty$
$P(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

Rădăcina care ne interesează $x_1 \in (1,1; 1,2)$.

Aplicînd de două ori metoda coardei pentru aproximarea rădăcinii, găsim:

$$x = 1,17; \quad p = 100(1,17 - 1) = 17\%.$$

Numărul de piese va trebui să crească în medie cu 17% în fiecare an față de anul precedent.

§ 2. Criteriu pentru aplicarea în practică a mărimilor medii

Deoarece mărimile medii se aplică în multe domenii de activitate (planificarea și analiza activității întreprinderilor industriale, agricole, de construcții sau de transport, în biologie, medicină etc.) problema care se pune este de a ști cînd se aplică aceste mărimi.

În care probleme se aplică media aritmetică, în care media armonică, geometrică sau pătratică?

Răspunsul la această întrebare rezultă din teoria Chissini-Boiarschi¹ care se sprijină pe următoarele definiții:

- O colectivitate statistică poate avea diferite proprietăți.
- O parte din aceste proprietăți pot fi exprimate numeric.
- Numim *proprietate determinantă* a unei colectivități statistice acea proprietate care rămîne neschimbată cînd variabila x ia toate valorile posibile $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- Proprietatea determinantă se exprimă întotdeauna printr-o funcție de aceste variabile:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

— Se numește *valoare medie* a variabilei x , după proprietatea determinantă, acea valoare $\bar{x}$, care prin substituția:

$$x_i = \bar{x}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

nu modifică proprietatea determinantă.

Ca o consecință a definițiilor date, rezultă că valoarea medie $\bar{x}$ se va obține rezolvînd ecuația:

$$F(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8)$$

Pentru a vedea cum se aplică practic această teorie, vom da cîteva exemple.

¹ Elaborată independent unul de altul în anul 1929.

1. Se topesc împreună n aliaje de aur $A_1, A_2, \dots, A_n$ care au titlurile:

$$t_1, t_2, \dots, t_n,$$

și masele:

$$m_1, m_2, \dots, m_n.$$

Se cere titlul noului aliaj.

Soluție. Amintim că titlul unui aliaj reprezintă cantitatea de aur pur conținut într-un gram de aliaj. Astfel, cantitatea de aur G_i conținută în aliajul A_i , va fi dat de formula:

$$G_i = m_i \cdot t_i; i = 1, 2, \dots, n.$$

Se constată că proprietatea determinantă a tuturor aliajelor este cantitatea de aur pur conținută în întregul aliaj.

Dar întreaga cantitate de aur din cele n aliaje este în funcție de titlurile t_i ale acestor aliaje.

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n) = m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_n t_n. \quad (9)$$

Dacă notăm cu $\bar{t}$, valoarea medie a titlului noului aliaj rezultat după topirea celor n aliaje, vom putea scrie:

$$F(\bar{t}, \bar{t}, \dots, \bar{t}) = m_1 \bar{t} + m_2 \bar{t} + \dots + m_n \bar{t}. \quad (10)$$

Cum în baza relației (8) funcțiile (9) și (10) sînt egale, obținem:

$$m_1 \bar{t} + m_2 \bar{t} + \dots + m_n \bar{t} = m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_n t_n,$$

sau

$$\bar{t} = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_n t_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i t_i}{m},$$

unde $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

În acest exemplu s-a folosit *media aritmetică ponderată*.

2. Prețul de cost al unui produs similar la n fabrici a fost $c_1, c_2, \dots, c_n$ lei/unitate de produs.

Totalul cheltuielilor efective pentru realizarea producției la fiecare din cele n fabrici a fost același, C lei.

Se cere prețul de cost mediu al acelui produs la cele n fabrici.

Soluție. Proprietatea determinantă este cantitatea totală a producției realizată la cele n fabrici.

Dacă notăm cu:

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n,$$

producția realizată la cele n fabrici, vom putea scrie:

$$Q_1 = \frac{C}{c_1}; \quad Q_2 = \frac{C}{c_2}; \quad \dots; \quad Q_n = \frac{C}{c_n}$$

și deci funcția determinantă, care trebuie să reprezinte întreaga producție la cele n fabrici, va fi:

$$F(c_1, c_2, \dots, c_n) = \frac{C}{c_1} + \frac{C}{c_2} + \dots + \frac{C}{c_n}. \quad (11)$$

Dacă notăm cu $\bar{c}$ prețul de cost mediu realizat la cele n fabrici, relația (11) devine:

$$F(\bar{c}, \bar{c}, \dots, \bar{c}) = \frac{C}{\bar{c}} + \frac{C}{\bar{c}} + \dots + \frac{C}{\bar{c}}, \quad (12)$$

cum funcțiile (11) și (12) sînt egale:

$$\frac{C}{\bar{c}} + \frac{C}{\bar{c}} + \dots + \frac{C}{\bar{c}} = \frac{C}{c_1} + \frac{C}{c_2} + \dots + \frac{C}{c_n},$$

de unde rezultă:

$$\bar{c} = \frac{n}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{c_i}}.$$

Se constată că în acest exemplu, am folosit *media armonică simplă*.

3. În n perioade de timp consecutive (de exemplu în cele 12 luni ale unui an) prețul de cost al unui produs la o întreprindere industrială a fost:

$$c_1, c_2, \dots, c_n \text{ (lei/unitate de produs).}$$

Știind că totalul cheltuielilor efective realizate pe cele n perioade de timp a fost:

$$S_1, S_2, \dots, S_n \text{ (lei),}$$

se cere prețul de cost mediu al acelui produs pe întreaga perioadă de timp luată în considerare.

Soluție. Proprietatea determinantă este întreaga cantitate de produse realizată în cele n perioade de timp și depinde de prețul de cost al produsului în fiecare din cele n perioade.

Dacă notăm cu

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n$$

cantitățile produse în cele n perioade de timp, vom putea scrie:

$$Q_1 = \frac{S_1}{c_1}; \quad Q_2 = \frac{S_2}{c_2}; \quad \dots; \quad Q_n = \frac{S_n}{c_n},$$

iar funcția determinantă, care trebuie să exprime întreaga producție realizată, va fi:

$$F(c_1, c_2, \dots, c_n) = \frac{S_1}{c_1} + \frac{S_2}{c_2} + \dots + \frac{S_n}{c_n}. \quad (13)$$

Dacă notăm cu $\bar{c}$ prețul de cost mediu realizat pe întreaga perioadă de timp, relația (13) devine :

$$F(\bar{c}, \bar{c}, \dots, \bar{c}) = \frac{S_1}{\bar{c}} + \frac{S_2}{\bar{c}} + \dots + \frac{S_n}{\bar{c}}. \quad (14)$$

Cum (13) și (14) sînt egale, obținem :

$$\frac{S_1}{\bar{c}} + \frac{S_2}{\bar{c}} + \dots + \frac{S_n}{\bar{c}} = \frac{S_1}{c_1} + \frac{S_2}{c_2} + \dots + \frac{S_n}{c_n},$$

de unde se deduce :

$$\bar{c} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{\frac{S_1}{c_1} + \frac{S_2}{c_2} + \dots + \frac{S_n}{c_n}} = \frac{\Sigma S}{\Sigma \frac{S_i}{c_i}}.$$

Soluția a fost obținută folosind media *armonică ponderată*.

4. Prețul de cost al unui produs oarecare în valoare de C_0 lei a suferit n variații (reduceri sau majorări) cu procente $p_1, p_2, \dots, p_n$, în n perioade de timp consecutive.

Se cere :

- Procentul mediu de variație a prețului de cost la acel produs ($\bar{p}$).
- Costul final (C_n) al produsului, după cele n variații succesive.

Soluție. Funcția determinantă va depinde de procente parțiale p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de variație a prețului de cost.

După n reduceri consecutive cu procente $p_1, p_2, \dots, p_n$, costul produsului devine :

$$C_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right).$$

Dacă funcția determinantă, care trebuie să exprime prețul de cost al produsului după cele n variații succesive, va fi :

$$F(p_1, p_2, \dots, p_n) = C_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right). \quad (15)$$

Dacă notăm cu $\bar{p}$ procentul mediu de variație a prețului de cost în fiecare din cele n perioade de timp, (15) devine :

$$F(\bar{p}, \bar{p}, \dots, \bar{p}) = C_0 \left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right) \left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right). \quad (16)$$

Din (15) și (16) obținem ecuația :

$$\begin{aligned} C_0 \left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right) \left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right) &= \\ &= C_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right), \end{aligned}$$

din care rezultă :

$$\left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right)^n = \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right), \quad (17)$$

$$\bar{p} = \left[\sqrt[n]{\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right)} - 1 \right] \cdot 100.$$

Costul final (C_n) al produsului după n variații succesive a prețului de cost va fi :

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{\bar{p}}{100}\right)^n = C_0 \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{p_i}{100}\right).$$

Procentul total (q) de variație a prețului de cost după cele n variații succesive va fi :

$$q = 100 \left(\frac{C_n}{C_0} - 1 \right).$$

Dacă notăm :

$$\bar{c} = 1 + \frac{\bar{p}}{100}; \quad c_i = 1 + \frac{p_i}{100}; \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

relația (17) se scrie :

$$\bar{c}^n = c_1 \cdot c_2 \dots c_n; \quad \bar{c} = \sqrt[n]{c_1 \cdot c_2 \dots c_n},$$

și reprezintă coeficientul mediu de variație a prețului de cost.

Se constată că pentru rezolvarea problemei s-a folosit *media geometrică simplă*.

5. Consumul de benzină al unei mașini în unitate de timp (pe oră) este proporțională cu pătratul vitezei acelei mașini.

Dacă notăm cu :

t_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), intervalele de timp în care a mers mașina ;

v_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), vitezele corespunzătoare acestor intervale, se cere să se determine viteza medie $\bar{v}$ cu care va trebui să meargă mașina, pentru ca în fiecare interval de timp să consume aceeași cantitate de benzină.

Soluție. Proprietatea determinantă este cantitatea totală de benzină consumată de mașină pe întreaga perioadă de timp $t = t_1 + t_2 + \dots + t_n$.

Dacă notăm cu :

q_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) cantitatea de benzină consumată în timpul t_i , vom putea scrie în baza enunțului :

$$q_i = k \cdot t_i \cdot v_i^2,$$

unde k este o constantă ce caracterizează consumul fiecărei mașini.

Ținând seama de proprietatea determinantă care trebuie să reprezinte întreaga cantitate de benzină consumată în cele n perioade de timp, se obține funcția :

$$F(v_1, v_2, \dots, v_n) = k \cdot t_1 \cdot v_1^2 + k \cdot t_2 \cdot v_2^2 + \dots + k \cdot t_n \cdot v_n^2. \quad (18)$$

Cum funcția determinantă nu se schimbă dacă înlocuim pe v_i cu $\bar{v}$, rezultă :

$$F(\bar{v}, \bar{v}, \dots, \bar{v}) = k \cdot t_1 \cdot \bar{v}^2 + k \cdot t_2 \cdot \bar{v}^2 + \dots + k \cdot t_n \cdot \bar{v}^2. \quad (19)$$

Egalind relațiile (18) cu (19), găsim :

$$k \cdot t_1 \cdot \bar{v}^2 + k \cdot t_2 \cdot \bar{v}^2 + \dots + k \cdot t_n \cdot \bar{v}^2 = \\ = k \cdot t_1 \cdot v_1^2 + k \cdot t_2 \cdot v_2^2 + \dots + k \cdot t_n \cdot v_n^2,$$

și deci viteza medie $\bar{v}$, va fi :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{t_1 v_1^2 + t_2 v_2^2 + \dots + t_n v_n^2}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}} = \sqrt{\frac{\sum t_i v_i^2}{t}}. \quad (20)$$

Se constată că media care rezolvă problema este *media pătratică ponderată*.

Observație: Dacă notăm :

$$\frac{t_i}{t} = p_i; \quad \sum_1^n p_i = \frac{t_1}{t} + \frac{t_2}{t} + \dots + \frac{t_n}{t} = \frac{\sum t_i}{t} = 1,$$

formula (20) se mai poate scrie și sub forma :

$$\bar{v} = \sqrt{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2} = \sqrt{\sum p_i v_i^2}.$$

Concluzie. Teoria Chissini-Boiarschi ne permite să găsim valoarea medie a unui indicator economic sau tehnic, dintr-o serie de mărimi date ale aceluși indicator (ce fac parte dintr-o colectivitate statistică).

În acest scop se constată care este proprietatea determinantă a colectivității, apoi se exprimă acea proprietate cu ajutorul unei funcții $F(x_i)$, în care variabilele x_i fac parte din seria de mărimi date, a cărei medie o căutăm.

Folosind proprietatea prin care funcția determinantă nu se schimbă când înlocuim pe x_i cu $\bar{x}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), se obține ecuația :

$$F(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

din care se deduce media căutată $\bar{x}$.

§ 3. Relații între mărimile medii

Fie x_1, x_2 două numere pozitive $x_1 \geq x_2$.

$$m_p = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = \text{media pătratică},$$

$$m_a = \frac{x_1 + x_2}{2} = \text{media aritmetică},$$

$$m_g = \sqrt{x_1 \cdot x_2} = \text{media geometrică},$$

$$m_h = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \text{media armonică},$$

$$\max \{x_1, x_2\} = x_1; \quad \min \{x_1, x_2\} = x_2.$$

Se constată că :

$$x_1 \geq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \Rightarrow 2x_1^2 \geq x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow x_1 \geq x_2 \Rightarrow \max \{x_1, x_2\} \geq m_p;$$

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 2(x_1^2 + x_2^2) \geq (x_1 + x_2)^2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0 \Rightarrow m_p \geq m_a;$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 x_2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0 \Rightarrow m_a \geq m_g;$$

$$\sqrt{x_1 x_2} \geq \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 x_2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0 \Rightarrow m_g \geq m_h;$$

$$\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \geq x_2 \Rightarrow 2x_1 \geq x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 \geq x_2 \Rightarrow m_h \geq \min \{x_1, x_2\}.$$

Se obțin astfel următoarele relații între mărimile medii :

$$\max \{x_1, x_2\} \geq m_p \geq m_a \geq m_g \geq m_h \geq \min \{x_1, x_2\}. \quad (21)$$

Aceste relații se păstrează și în cazul general a n numere pozitive $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} \max \{x_1, x_2, \dots, x_n\} &\geq \sqrt[n]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \\ &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \geq \min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \end{aligned}$$

Ne propunem să arătăm că relația $m_g \leq m_a$ este generală.

În acest scop vom demonstra următoarea teoremă :

Dacă suma a n numere pozitive $x_1, x_2, \dots, x_n$ este constantă ($x_1 + x_2 + \dots + x_n = nc$) produsul lor este maxim dacă numerele sînt egale ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = c$).

Demonstrație. Presupunem că x_1 și x_2 sînt variabile, iar $x_3, x_4, \dots, x_n$ constante ($x_3 + x_4 + \dots + x_n = a$; $x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n = A$).

Cum prin ipoteză

$$x_1 + x_2 = nc - (x_3 + x_4 + \dots + x_n) = nc - a = \text{constant},$$

produsul

$$x_1 \cdot x_2 (x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n) = A \cdot x_1 \cdot x_2,$$

va deveni maxim odată cu produsul $x_1 x_2$ adică atunci cînd $x_1 = x_2$ (în baza teoremei de maxim T_1).

Nici un motiv nu ne oprește să considerăm ca variabile, oricare pereche x_i, x_j ($i \neq j = 1, 2, \dots, n$).

Urmînd același raționament pentru fiecare pereche x_i, x_j ajungem la concluzia că maximul produsului $x_1 \cdot x_2 \dots x_n$ va fi atins atunci cînd $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Cum prin ipoteză:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = nc \quad (22)$$

se deduce $x_1 + \dots + x_n = nc \rightarrow nx_1 = nc \rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = c$;

$$\max(x_1 \cdot x_2 \dots x_n) = c^n.$$

Consecință. Din egalitatea obținută rezultă că în general:

$$x_1 \cdot x_2 \dots x_n < c^n. \quad (23)$$

Eliminînd pe c între (22) și (23) găsim:

$$x_1 \cdot x_2 \dots x_n < \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n,$$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Aceasta înseamnă că, în general media geometrică este mai mică decît media aritmetică ($m_g < m_a$), egalitatea avînd loc atunci cînd $x_1 = x_2 = \dots = x_n = c$.

$$m_g = m_a = \sqrt[n]{c \cdot c \dots c} = \frac{c + c + \dots + c}{n} = c.$$

În acest caz, toate mărimile medii de ordinul $r, \dots$, cubice, pătratice, aritmetice, geometrice, armonice, sînt egale între ele:

$$m_r = \dots = m_c = m_p = m_a = m_g = m_h = c.$$

§ 4. Interpretarea geometrică a mărimilor medii

Pe diametrul $|AF|$ al semicercului ABF cu centrul O și raza R (fig. 1) se consideră un punct arbitrar M ($M \neq A$; $M \neq F$) și notăm:

$$||AM|| = x_1; ||MF|| = x_2; \max \{x_1, x_2\} = x_1 = ||AM||;$$

$$\min \{x_1, x_2\} = x_2 = ||MF||,$$

$$||MB|| = \sqrt{||OM||^2 + ||OB||^2} = \sqrt{(||OF - MF||)^2 + ||OF||^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = m_p,$$

$$||MC|| = ||OD|| = ||OF|| = \frac{||AM|| + ||MF||}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = m_a,$$

$$||MD|| = \sqrt{||AM|| \cdot ||MF||} = \sqrt{x_1 \cdot x_2} = m_g,$$

$$||ME|| = \frac{||MD||^2}{||MC||} = \frac{x_1 \cdot x_2}{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{2x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = m_h.$$

De asemenea, avem și următoarele relații între segmente, (fig. 1):

$$\begin{aligned} ||MA|| &\geq ||MB|| \geq \\ &\geq ||MC|| \geq ||MD|| \geq \\ &\geq ||ME|| \geq ||MF||, \end{aligned} \quad (24)$$

sau, dacă ținem seama de semnificația lor, rezultă:

$$\begin{aligned} \max \{x_1, x_2\} &\geq m_p \geq m_a \geq \\ &\geq m_g \geq m_h \geq \min \{x_1, x_2\}, \end{aligned}$$

identice cu relațiile (21) obținute mai sus.

Relațiile (24) se justifică astfel:

$||MA|| > ||MB||$, deoarece în $\triangle ABM$ laturii $|AM|$ i se opune un unghi mai mare decât laturii $|MB|$ ($m\widehat{ABM} = (m\widehat{ABO}) + (m\widehat{OBM}) = 45^\circ + (m\widehat{OBM})$, iar $(m\widehat{BAM}) = 45^\circ$;

$||MB|| > ||MC||$, deoarece $||BM||$ este o oblică mai depărtată de piciorul perpendicularei $|MO|$ decât oblica $||MC||$ ($||OB|| > ||OC||$);

$||MC|| > ||MD||$, deoarece $|MC|$ este ipotenuză, iar $|MD|$ catetă în $\triangle MDC$;

$||MD|| > ||ME||$, deoarece $|MD|$ este ipotenuză, iar $|ME|$ catetă în $\triangle MED$;

$||ME|| > ||MF||$, deoarece $||ME|| - ||MF|| = (||CM|| - ||CE||) - (||OF|| - ||OM||) = ||OM|| - ||CE|| = ||CD|| - ||CE|| > 0$ ($|CD|$ este ipotenuză, iar $|CE|$ catetă în $\triangle CDE$).

Observații: — Dacă $x_1 = x_2$, punctul M se confundă cu O . Relațiile (21) și (24) vor fi satisfăcute cu semnul egal:

$$||MA|| = ||MB|| = ||MC|| = ||MD|| = ||ME|| = ||MF|| = R.$$

— Mărimile segmentelor $|MB|$, $|MC|$, $|MD|$, $|ME|$ reprezintă: *media pătratică, aritmetică, geometrică și armonică*, toate avînd o extremitate comună M situată pe diametrul $|AF|$.

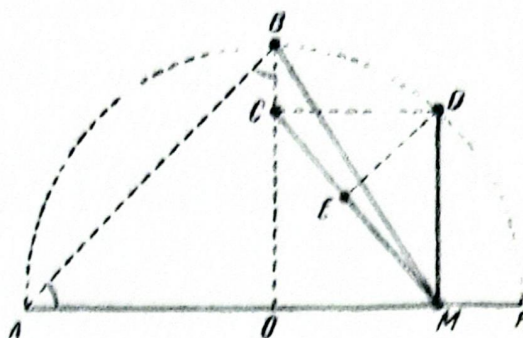


Fig. 1.

§ 5. Teoreme de maxim și minim, demonstrate cu ajutorul unor relații între mărimile medii

Teorema de maxim (T_1).

Dacă suma puterilor p a n numere pozitive $x_1, x_2, \dots, x_n$ este constantă, produsul lor este *maxim*, dacă numerele sînt egale.

Demonstrație. Folosind relația între mărimile medii:

$$m_g \leq m_{ap}; \Rightarrow \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}},$$

se constată că în general, m_g este mai mică decât m_{ap} . Valoarea sa maximă se obține atunci cînd $m_g = m_{ap}$ și are loc dacă $x_1 = \dots = x_n$.

Dacă notăm $x_1^p + \dots + x_n^p = nc^p$; din $m_g = m_{ap}$ se deduce:
 $\max(x_1 \dots x_n) = c^n$ și are loc dacă $x_1 = \dots = x_n = c$ (c.c.t.d).

În particular, pentru $p = 1, 2, 3, \dots, r$, teorema T_1 se enunță astfel:

Dacă suma pătratelor, suma cuburilor, ..., suma puterilor de ordinul r a n numere pozitive $x_1, \dots, x_n$ este constantă, produsul lor este maxim când numerele sînt egale.

Cazul particular $p = 1; n = 2$

Dacă suma a două numere pozitive x_1, x_2 este constantă ($x_1 + x_2 = 2c$), produsul lor este maxim, când numerele sînt egale (sau dacă nu pot fi egale, atunci când diferența lor este minimă¹).

Demonstrația 1. Folosind identitatea algebrică:

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2,$$

se obține

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4} [(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2].$$

Cum prin ipoteză $x_1 + x_2 = 2c = \text{constant}$, rezultă că:

$$\max(x_1 \cdot x_2) = \frac{1}{4} \max[4c^2 - (x_1 - x_2)^2],$$

și are loc atunci când $(x_1 - x_2)^2 = 0$; sau $x_1 = x_2$.

Se deduce $x_1 = x_2 = c$; $\max(x_1 \cdot x_2) = c^2$ (c.c.t.d).

Demonstrația 2. Metoda geometrică.

Pe diametrul $|AB|$ al semicercului de centru O și rază R se consideră punctul C . Ducem $|CD| \perp |AB|$; $|OE| \perp |AB|$ și notăm $||AC|| = x_1$; $||CB|| = x_2$ (fig. 2).

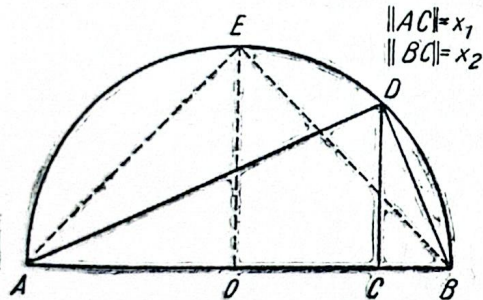


Fig. 2.

Din $\triangle ADB$ rezultă $||DC||^2 = ||AC|| \cdot ||CB|| = x_1x_2$. Cum $x_1 + x_2 = ||AB|| = 2R = \text{constant}$,

$||DC||$ este maxim când $D = E$, iar $C = O$. În acest caz:

$$x_1 = ||AO||; \quad x_2 = ||OB||;$$

$$||AO|| = ||OB|| = R;$$

$$\max(x_1 x_2) = ||AO|| \cdot ||OB|| = R^2;$$

$$x_1 = x_2 = R. \text{ (c.c.t.d.)}$$

Demonstrația 3. Folosind relația între mărimile medii:

$$m_g \leq m_a; \quad \sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Media geometrică este mai mică sau egală decât media aritmetică. Valoarea sa maximă, se obține atunci când $m_g = m_a$; adică atunci când $x_1 = x_2$ (c.c.t.d).

¹ Această observație se menține în toate cazurile similare.

Cum $x_1 + x_2 = 2c$, rezultă $x_1 = x_2 = c$; $\max(x_1 \cdot x_2) = c^2$.

Cazul particular $p = 2$; $n = 2$.

Dacă suma pătratelor a două numere pozitive x_1, x_2 este constantă ($x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$), produsul lor este maxim când numerele sînt egale.

Demonstrația 1. Folosind identitatea algebrică:

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = (x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1^2 x_2^2,$$

se deduce

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2}.$$

Cum prin ipoteză $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$ (constant), rezultă că:

$$\max(x_1 \cdot x_2) = \frac{1}{2} \max \sqrt{4c^4 - (x_1^2 - x_2^2)^2},$$

și se obține atunci când $(x_1^2 - x_2^2)^2 = 0$; $x_1 = x_2$.

$$(x_1 \cdot x_2) = c^2; x_1 = x_2 = c \text{ (c.c.t.d.)}$$

Demonstrația 2. Metoda geometrică.

Pe diametrul $|AB|$ al semicercului de centru O și rază R (fig. 3) se consideră un punct C . Ducem $|CD| \perp |AB|$; $|EO| \perp |AB|$ și notăm $|AD| = x_1$; $|DB| = x_2$.

Cum $|AD|^2 + |DB|^2 = |AB|^2 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 4R^2$ (constant). Produsul

$$\begin{aligned} P &= x_1 \cdot x_2 = |AD| \cdot |DB| = \\ &= |AB| \cdot |DC| = 2R \cdot |DC|; \end{aligned}$$

iar

$$\max(x_1 \cdot x_2) = 2R \cdot \max |DC|.$$

Dar $\max |DC| = |OE| = R$ (punctul C se confundă cu O , iar D cu E).

În acest caz $\max(x_1 \cdot x_2) = |AE| \cdot |EB| = |AB| \cdot |OE| = 2R \cdot R = 2R^2$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = |AE| = R\sqrt{2}$.

Rezultă că: dacă $x_1^2 + x_2^2 = 4R^2 = \text{constant}$; $\max(x_1 \cdot x_2) = 2R^2$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = R\sqrt{2}$ (c.c.t.d.).

Demonstrația 3. Folosim relația între mărimile medii:

$$m_g \leq m_p \Rightarrow \sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Se constată că în general, media geometrică este mai mică decît media pătratică. Valoarea sa maximă se obține atunci când $m_g = m_p$ și are loc dacă $x_1 = x_2$.

Dacă notăm $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$; din $m_g = m_p$ se deduce:

$$\max(x_1 \cdot x_2) = c^2 \text{ și are loc dacă } x_1 = x_2 = c \text{ (c.c.t.d.)}$$

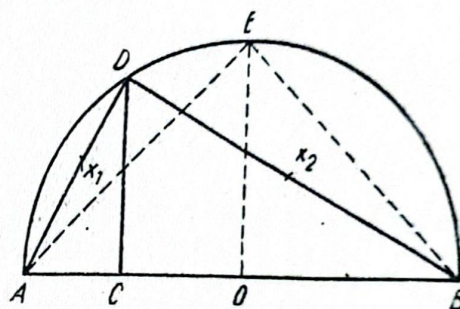


Fig. 3.

Teorema de maxim (T_2).

Dacă suma puterilor p a n numere pozitive $x_1, \dots, x_n$ este constantă, suma lor este maximă când numerele sînt egale.

Demonstrație. Folosind relația între mărimile medii:

$$m_n \leq m_{np} \rightarrow \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt[p]{\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}},$$

se constată că m_n este în general mai mică decît m_{np} .

Valoarea sa maximă se obține atunci cînd $m_n = m_{np}$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Dacă notăm $x_1^p + \dots + x_n^p = nc^p$, din $m_n = m_{np}$ se deduce:

$$\max(x_1 + \dots + x_n) = nc; \text{ iar } x_1 = \dots = x_n = c \text{ (c.c.t.d.)}$$

În particular, pentru $p = 2, 3, \dots, r$, teorema de maxim T_2 se enunță astfel: dacă suma pătratelor, suma cuburilor, ..., suma puterilor de ordinul r a n numere pozitive $x_1, \dots, x_n$ este constantă, suma lor este maximă, cînd numerele sînt egale.

Cazul particular $p = 2$; $n = 2$

Dacă suma pătratelor a două numere pozitive x_1, x_2 este constantă ($x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$), suma lor este maximă, dacă numerele sînt egale.

Demonstrația 1. Folosind identitatea algebrică:

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 2(x_1^2 + x_2^2),$$

se obține

$$x_1 + x_2 = \sqrt{2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 - x_2)^2}.$$

Cum prin ipoteză $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$ (constant), rezultă că:

$$\max(x_1 + x_2) = \max \sqrt{4c^2 - (x_1 - x_2)^2},$$

și are loc dacă $(x_1 - x_2)^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$ (c.c.t.d.).

Se deduce $x_1 = x_2 = c$; $\max(x_1 + x_2) = 2c$.

Demonstrația 2. Metoda geometrică

În pătratul $ABCD$ (fig. 4) ducem $|EF| \parallel |BC|$; $|E'F| \parallel |AB|$ și notăm:

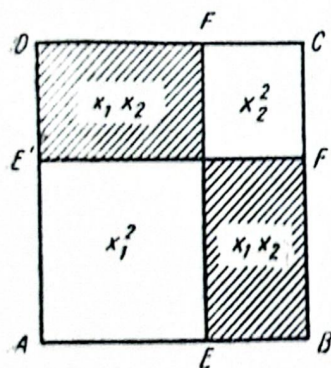


Fig. 4.

$$|AE| = |DF| = |AE'| = |BF'| = x_1;$$

$$|EB| = |FC| = |CF'| = |DE'| = x_2;$$

$$|AB| = l.$$

Cum prin ipoteză suma ariilor celor două pătrate nehașurate este constantă: $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$ (constant), aria pătratului $ABCD = (x_1 + x_2)^2$ va fi maximă, odată cu aria celor două dreptunghiuri hășurate ($x_1 x_2$).

Cum $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$ (constant), produsul $x_1 x_2$ va fi maxim dacă $x_1 = x_2 = c$ (cele două dreptunghiuri devin pătrate).

Rezultă că $\max (x_1 + x_2) = 2c = l$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$ (c.c.t.d.).

Demonstrația 3. Folosind relația între mărimile medii:

$$m_a \leq p_p; \quad \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}},$$

se constată că în general media aritmetică este mai mică decât media pătratică. Valoarea sa maximă se obține atunci când $m_a = m_p$ și are loc dacă $x_1 = x_2$.

Dacă notăm $x_1^2 + x_2^2 = 2c^2$, din $m_a = p_m$ se deduce:

$$\max (x_1 + x_2) = 2c, \text{ iar } x_1 = x_2 = c. \text{ (c.c.t.d.)}$$

Teorema de maxim (T_3)

Dacă suma a două numere pozitive x, y este constantă ($x + y = c$), produsul $P = x^m \cdot y$ este maxim dacă $x = my$.

Demonstrație. Considerăm produsul $mP = mx^m y$ scris sub forma: $mP = x \cdot x \dots x \cdot my = x \cdot x \dots x (mc - mx)$.

Cum m este constant, $\max P$ se va realiza odată cu $\max (mP)$.

Cum suma factorilor ce compun produsul mP este constantă:

$$x + x + \dots + x + (mc - mx) = mx + mc - mx = mc,$$

rezultă că $\max (mP)$ și deci $\max P$ se va realiza atunci când factorii sînt egali:

$$x = x = \dots = x = mc - mx.$$

Se deduce $x + mx = mc$; $x = mc : (m + 1)$, iar din $x + y = c$ rezultă $y = c - x = c - mc : (m + 1) = c : (m + 1)$; sau $x : y = m$; $x = my$ (c.c.t.d.).

În mod analog se arată că:

Dacă suma a două numere pozitive este constantă ($x + y = c$), produsul $P = x \cdot y^n$ este maxim dacă $y = nx$.

Sau, mai general:

Dacă suma a două numere pozitive este constantă ($x + y = c$), produsul $P = x^m \cdot y^n$ este maxim dacă $nx = my$.

Demonstrație. Considerăm produsul $m^n \cdot n^m \cdot P = m^n \cdot n^m \cdot x^m \cdot y^n = (nx)^m \cdot (my)^n = (nx \cdot nx \dots nx) \cdot (my \cdot my \dots my) = nx \cdot nx \dots nx \cdot (mc - mx)(mc - mx) \dots (mc - mx)$.

Deoarece suma factorilor ce compun acest produs este constantă:

$$(nx + nx + \dots + nx) + (mc - mx) + (mc - mx) + \dots + (mc - mx) = mnx + n(mc - mx) = mnc = \text{constant};$$

produsul

$$m^n \cdot n^m \cdot P,$$

deci și produsul P este maxim atunci când factorii acestui produs sînt egali:

$$nx = mc - mx; \quad x(m + n) = mc; \quad x = mc : (m + n).$$

Rezultă: $y = c - x = c - mc : (m + n) = nc : (m + n) \rightarrow y : x = n : m$;
sau $nx = my$. (c.c.t.d).

Cazul particular $m = 2; n = 1$

Dacă suma a două numere pozitive x, y este constantă ($x + y = c$), produsul $P = x^2y$ este maxim dacă $x = 2y$.

Teorema de minim (T_1)

Dacă produsul a n numere pozitive $x_1, x_2, \dots, x_n$ este constant ($x_1 x_2 \dots x_n = c^n$), suma puterilor p a celor n numere este *minimă*, dacă acele numere sînt egale.

Demonstrație. Folosind relația între mărimile medii:

$$m_{n,p} \geq m_g \rightarrow \sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

se constată că media aritmetică de ordinul p este *mai mare* sau cel mult egală cu media geometrică.

Valoarea *minimă* se obține atunci cînd cele două mărimi medii sînt egale și are loc dacă $x_1 = \dots = x_n$.

Cum prin ipoteză $x_1 \dots x_n = c^n = \text{constant}$, din $m_{n,p} = m_g$ se deduce: $\min(x_1^p + \dots + x_n^p) = nc^p$ și are loc atunci cînd cele n numere sînt egale, $x_1 = \dots = x_n = c$. (c.c.t.d).

În particular, pentru $p = 1, 2, 3, \dots, r$; teorema de minim T_1 se enunță astfel: dacă produsul a n numere pozitive este constant, atunci suma, suma pătratelor, suma cuburilor, ..., suma puterilor de ordinul r a acelor n numere este *minimă*, dacă numerele sînt egale.

Cazul particular $p = 1; n = 2$

Dacă produsul a două numere pozitive x_1, x_2 este constant ($x_1 x_2 = c^2$), suma lor este *minimă*, dacă numerele sînt egale

Demonstrația 1. Folosind identitatea evidentă:

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2,$$

se deduce

$$x_1 + x_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2}.$$

Cum prin ipoteză, $x_1x_2 = c^2$ (constant), rezultă că:

$$\min(x_1 + x_2) = \min \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4c^2},$$

și se obține atunci cînd $(x_1 - x_2)^2 = 0$; $x_1 = x_2 = c$; $\min(x_1 + x_2) = 2c$ (c.c.t.d).

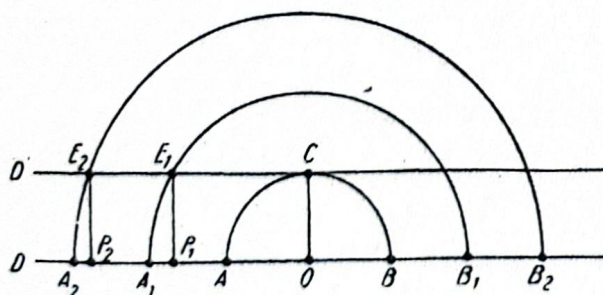


Fig. 5.

Demonstrația 2. Metodă geometrică

Fie dreptele $D \parallel D'$. Se descriu semicercurile concentrice cu centrul în O și de diametri: $|AB|$, $|A_1B_1|$, $|A_2B_2|$, ... (fig. 5).

Ducem: $|CO| \perp |AB|$; $|E_1P_1| \perp |A_1B_1|$; $|E_2P_2| \perp |A_2B_2|$; ...

Teorema înălțimii aplicată în $\triangle ACB$; $\triangle A_1E_1B_1$; $\triangle A_2E_2B_2$; ne permite să scriem: $||CO||^2 = ||AO|| \cdot ||OB||$; $||E_1P_1||^2 = ||A_1P_1|| \cdot ||P_1B_1||$; $||E_2P_2||^2 = ||A_2P_2|| \cdot ||P_2B_2||$; ...

Cum $||CO|| = ||E_1P_1|| = ||E_2P_2|| = \dots$, deoarece am presupus $D||D'$, rezultă că:

$$||AO|| \cdot ||OB|| = ||A_1P_1|| \cdot ||P_1B_1|| = \\ = ||A_2P_2|| \cdot ||P_2B_2|| = \dots = \text{constant.}$$

Sumele factorilor acestor produse sînt:

$$||AO|| + ||OB|| = ||AB||; ||A_1P_1|| + ||P_1B_1|| = ||A_1B_1||; \\ ||A_2P_2|| + ||P_2B_2|| = ||A_2B_2||; \dots$$

Se constată că minimul acestor sume este $||AB||$. În acest caz avem $||AO|| = ||OB||$. Minimul sumelor are loc atunci cînd numerele sînt egale. Putem enunța deci următoarea teoremă: dacă produsul a două numere este constant ($||AO|| \cdot ||OB|| = ||A_1P_1|| \cdot ||P_1B_1|| = ||A_2P_2|| \cdot ||P_2B_2|| = \dots = ||CO||^2 = \text{constant}$) suma acelor numere este minimă, dacă numerele sînt egale (c.c.t.d).

Demonstrația 3. Folosind relația între media aritmetică și media geometrică a două numere pozitive x_1, x_2 .

$$m_a \geq m_g; \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}; x_1, x_2 \geq 0.$$

Media aritmetică este în general mai mare decît media geometrică, valoarea sa minimă se obține atunci cînd $m_a = m_g$, adică atunci cînd $x_1 = x_2$ (c.c.t.d).

Cazul particular $p = 2$; $n = 2$

Dacă produsul a două numere pozitive x_1, x_2 este constant ($x_1 \cdot x_2 = c^2$), suma pătratelor lor este minimă, dacă numerele sînt egale.

Demonstrația 1. Folosind identitatea evidentă:

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = (x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1^2x_2^2,$$

se obține

$$x_1^2 + x_2^2 = \sqrt{(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1^2x_2^2}.$$

Cum prin ipoteză $x_1x_2 = c^2$ (constant), obținem:

$$\min(x_1^2 + x_2^2) = \min\sqrt{(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4 \cdot c^4},$$

și are loc dacă $x_1^2 - x_2^2 = 0$, sau $x_1 = x_2 = c$. (c.c.t.d).

Demonstrația 2. Metodă geometrică.

Din punctul fix A exterior cercului cu centrul O (fig. 6) se duc tangentele $|AT|$, $|AT'|$ și secanta ABC . Fie I mijlocul coardei $|BC|$ ($|BI| = |IC|$; $|OI| \perp |BC|$).

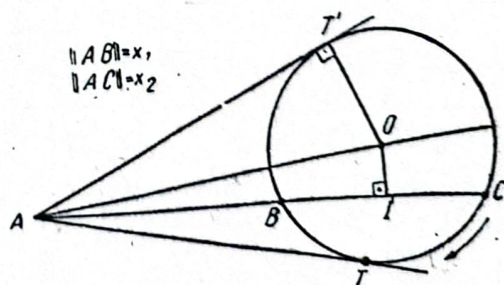


Fig. 6.

Dacă notăm $||AT|| = k = \text{constant}$, putem scrie:

$$||AB|| \cdot ||AC|| = ||AT||^2 = k^2; \quad ||AB||^2 + ||AC||^2 = (||AI|| - ||BI||)^2 + (||AI|| + ||BI||)^2 = (||AI|| - ||BI||)^2 + (||AI|| + ||BI||)^2 = 2||AI||^2 + 2||BI||^2 = 2(||AI||^2 + ||BI||^2).$$

Cînd secanta $|AC|$ se deplasează în sensul indicat de săgeată pînă cînd devine tangentă la cerc, punctul I se confundă cu T . Segmentele $|AI|$ și $|BI|$ se micșorează, astfel încît în momentul în care I se confundă cu T ; $|AB| \equiv |AC| \equiv |AT|$; $||BI|| = 0$ și suma $||AB||^2 + ||AC||^2$ devine minimă, $\min(||AB||^2 + ||AC||^2) = 2||AT||^2$.

Dacă notăm $||AB|| = x_1$; $||AC|| = x_2$; avem: $||AB|| \cdot ||AC|| = x_1 x_2 = ||AT||^2 = k^2$.

Suma $||AB||^2 + ||AC||^2 = x_1^2 + x_2^2 = 2(||AI||^2 + ||BI||^2)$ este minimă, dacă $I = T$ ($|AI| \equiv |AT|$ și $||BI|| = 0$). $\min(x_1^2 + x_2^2) = 2||AT||^2$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = ||AT|| = k$ (c.c.t.d.).

Demonstrația 3. Folosind relația între mărimile medii:

$$m_p \geq m_g; \quad \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}; \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Media pătratică este în general mai mare decît media geometrică; valoarea sa minimă se obține atunci cînd $m_p = m_g$; adică atunci cînd $x_1 = x_2$ (c.c.t.d.).

Cum $x_1 x_2 = c^2$, rezultă $x_1 = x_2 = c$; $\min(x_1^2 + x_2^2) = 2c^2$.

Teorema de minim (T_2).

Dacă suma a n numere pozitive $x_1, x_2, \dots, x_n$ este constantă, suma puterilor p a acelor numere este minimă, dacă acele numere sînt egale.

Demonstrație. Folosind relația între mărimile medii:

$$m_{ap} \geq m_a \rightarrow \sqrt[p]{\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n};$$

se constată că m_{ap} este în general mai mare decît m_a .

Valoarea sa minimă se obține atunci cînd cele două medii sînt egale, și are loc dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Dacă notăm $x_1 + \dots + x_n = nc$; din $m_{ap} = m_a$ se deduce: $\min(x_1^p + \dots + x_n^p) = nc^p$ și are loc atunci cînd $x_1 = \dots = x_n = c$ (c.c.t.d.).

În particular, pentru $p = 2, 3, \dots, r$, teorema T_2 se enunță astfel:

Dacă suma a n numere pozitive $x_1, x_2, \dots, x_n$ este constantă ($x_1 + x_2 + \dots + x_n = nc$), suma pătratelor, suma cuburilor, ..., suma puterilor de ordinul r este minimă, atunci cînd acele numere sînt egale.

Cazul particular $p = 2$; $n = 2$.

Dacă suma a două numere pozitive x_1, x_2 este constantă ($x_1 + x_2 = 2c$), suma pătratelor lor este minimă dacă numerele sînt egale.

Demonstrația 1. Folosind identitatea evidentă:

$$2(x_1^2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2.$$

se obține:

$$\min (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2} \min [(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2].$$

Cum prin ipoteză $x_1 + x_2 = 2c$ (constant), rezultă că:

$$\min (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2} \min 4[c^2 + (x_1 - x_2)^2].$$

și are loc dacă $(x_1 - x_2)^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$ (c.c.t.d.).

Se deduce $x_1 = x_2 = c$; $\min (x_1^2 + x_2^2) = 2c^2$.

Demonstrația 2. Metoda geometrică

În pătratul $ABCD$ (fig. 7) ducem $|EF| \parallel |BC|$; $|E'F'| \parallel |AB|$ și notăm:

$$|AE| = |DF| = |DE'| = |CF'| = x_1;$$

$$|EB| = |FC| = |BF'| = |AE'| = x_2.$$

Cum prin ipoteză $x_1 + x_2 = |AB| = l = \text{constant}$, suma ariilor celor două pătrate hașurate $x_1^2 + x_2^2$ va fi *minimă*, când suma ariilor celor două dreptunghiuri $2x_1x_2$ va fi *maximă*.

Cum $x_1 + x_2 = l = \text{constant}$, produsul x_1x_2 va fi *maxim*, dacă $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$ (cele două pătrate sînt egale).

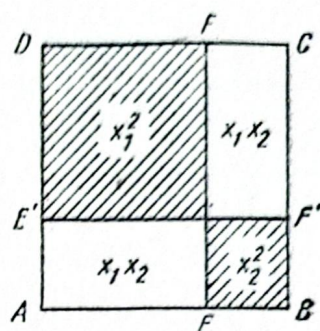


Fig. 7.

Rezultă că $\min (x_1^2 + x_2^2) = \frac{l^2}{2}$ și are loc când $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$ (c.c.t.d.).

Demonstrația 3. Folosind relația între media aritmetică m_a și media pătratică m_p a două numere x_1, x_2 :

$$m_p \geq m_a; \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Media pătratică este în general mai mare decât media aritmetică; valoarea sa minimă se obține atunci când cele două mărimi medii sînt egale $m_p = m_a$, și are loc dacă $x_1 = x_2$.

Cum prin ipoteză $x_1 + x_2 = 2c = \text{constant}$, din $m_p = m_a$ se deduce: $\min (x_1^2 + x_2^2) = 2c^2$ și are loc dacă $x_1 = x_2 = c$. (c.c.t.d.).

Teorema de minim T_3

Dacă produsul $x^m y^n$ este constant ($x^m y^n = c$), suma $x + y$ este minimă dacă $nx = my$.

Este reciproca teoremei de maxim T_3 . Dacă $x + y = c$, produsul $x^m \cdot y^n$ este maxim dacă $nx = my$.

Cazul particular $m = 2$; $n = 1$.

Dacă $x^2 y = c$; $\min (x + y) = 3 \cdot \sqrt[3]{c/4}$, și are loc pentru $x = 2y = 2 \cdot \sqrt[3]{c/4}$.

Cazul particular $m = 1$, $n = 2$.

Dacă $xy^2 = c$; $\min (x + y) = 3 \cdot \sqrt[3]{c/4}$, și are loc pentru $y = 2x = 2 \cdot \sqrt[3]{c/4}$.

CAPITOLUL II

PROBLEME DE MAXIM ȘI DE MINIM (TRATATE ELEMENTAR)

În acest capitol vom rezolva câteva probleme de maxim și minim pe cale elementară, cu ajutorul teoremelor deduse în capitolul I, sau alte metode simple, fără a folosi noțiunea de derivată.

§ 1. Probleme de maxim

1. Dintr-o foaie dreptunghiulară din tablă (sau carton) de arie $S = 192 \text{ m}^2$, se cere să se confecționeze un rezervor paralelipipedic fără capac, de volum maxim.

Soluție. Dacă notăm cu x, y dimensiunile bazei, cu z înălțimea și cu V volumul cutiei, se cere max. $V = \max (x \cdot y \cdot z)$, astfel ca :

$$S = xy + 2xz + 2yz = 192. \quad (1)$$

Dar produsul acestor termeni este :

$$(xy) \cdot (2xz) \cdot (2yz) = 4x^2y^2z^2 = 4(xyz)^2 = 4V^2.$$

În baza teoremei de maxim T_1 (cazul particular $p=1, n=3$), suma $S = xy + 2xz + 2yz$ fiind constantă ($S = 192$),

$$\max 4V^2 = \max (xy) \cdot (2xz) \cdot (2yz)$$

și deci $\max V$, va avea loc atunci când factorii acestui produs vor fi egali :

$$xy = 2xz = 2yz, \quad x = y = 2z. \quad (2)$$

Dacă ținem seama de (1) și (2) se deduce :

$$xy + xy + xy = 192; \quad xy = 64; \quad x^2 = 64; \quad x = y = 8; \quad z = 4.$$

Deci, cutia va avea baza unui pătrat cu latura 8 m, înălțimea 4 m, iar $\max V = 8 \cdot 8 \cdot 4 = 256 \text{ m}^3$.

2. Din mulțimea triunghiurilor care au același perimetru (48 m) să se determine triunghiul de arie maximă.

Soluție. Se știe că aria unui triunghi în funcție de laturile lui x, y, z , este dată de formula¹:

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Cum prin ipoteză toate triunghiurile au același perimetru $2p = 48$; $p = 24 = \text{constant}$, rămâne să cercetăm maximul produsului:

$$P = (p-x)(p-y)(p-z).$$

Dar suma:

$$(p-x) + (p-y) + (p-z) = 3p - (x+y+z) = 3p - 2p$$

fiind constantă, în baza teoremei de maxim T_1 (cazul particular $p = 1$, $n = 3$), produsul P va fi maxim, când cei 3 factori vor fi egali:

$$p-x = p-y = p-z; \Rightarrow x = y = z = 16; \max S = 64 \cdot \sqrt{3}.$$

Rezultă că, dintre toate triunghiurile cu același perimetru, triunghiul echilateral are aria maximă.

3. Dintre toate patrulaterelor cu același perimetru (64 m), inscriptibile într-un cerc, care este acela de arie maximă?

Soluție. Dacă notăm cu v, x, y, z lungimile laturilor unui patrulater inscriptibil, cu $2p$ perimetrul lui, aria lui S este dată de formula:

$$S = \sqrt{(p-v)(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Cum suma celor 4 factori este constantă:

$$\begin{aligned} (p-v) + (p-x) + (p-y) + (p-z) &= 4p - (v+x+y+z) = \\ &= 4p - 2p = 2p = 64, \end{aligned}$$

în baza aceleiași teoreme de maxim T_1 (cazul $p = 1$, $n = 4$), produsul celor 4 factori de sub radical va fi maxim dacă factorii sînt egali:

$$p-v = p-x = p-y = p-z \rightarrow v = x = y = z = 16; \max S = 256.$$

Rezultă că patrulaterul maxim înscris în cerc este pătratul.

4. Dintr-o foaie de tablă de arie dată $S = 60 \text{ m}^2$; se cere să se construiască un rezervor paralelipipedic închis a cărui volum să fie maxim.

Soluție. Notăm cu x, y, z , cele trei dimensiuni ale rezervorului, cu $S = 2(xy + yz + zx) = 60$, aria totală și cu $V = xyz$, volumul lui. Dar $\max V$ se va realiza odată cu $\max V^2 = \max (x^2 y^2 z^2) = \max (xy) \cdot (yz) \cdot (zx)$.

Cum suma $xy + yz + zx = S : 2 = 30$ este constantă, $\max V^2$ (și deci $\max V$) se va obține atunci când cei trei termeni ai sumei vor fi egali:

¹ Matematicienii arabi Abul-Vafa și Al Biruni (în cartea *Despre aflarea coardei unui cerc*, cunoscută pentru prima oară în 1910) relatează un fapt care a impresionat cercurile științifice contemporane: vestita teoremă pentru determinarea ariei unui triunghi cu ajutorul laturilor $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, cunoscută nouă din lucrările lui Heron din Alexandria (sec. 1-2), și denumită teorema lui Heron, a fost descoperită de Arhimede (c. 287-212 î.e.n.) și publicată în lucrarea sa *Cartea cercurilor*.

$xy = yz = zx$, sau $x = y = z$. Rezervorul va fi deci un cub. Se deduce, $x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 = S : 2 = 30 \rightarrow x = \sqrt{S : 6}$; $\max V = \sqrt{6S^3 : 36} = S \sqrt{6S : 36}$. În exemplul dat, rezervorul va fi un cub de latură $\sqrt{10}$ m, cu volumul maxim egal cu $10\sqrt{10}$ m³.

5. Dintr-o foaie de carton (tablă, material plastic) în formă de poligon regulat cu n laturi ($n=3, 4, 6, 8$) se cere să se confecționeze o cutie fără capac avînd forma unei prisme regulate drepte cu același număr de laturi, astfel încît capacitatea ei să fie maximă.

Soluție. Considerînd poligonul un octogon regulat, situația se prezintă ca în fig. 8. Pentru a obține o prismă se procedează astfel :

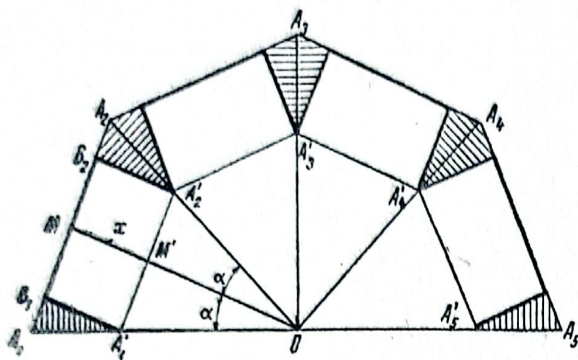


Fig. 8.

Se decupează figurile hașurate, apoi, dreptunghiurile rămase se vor îndoi după laturile $|A_1'A_2'|$, $|A_2'A_3'|$, ..., $|A_6'A_1'|$, pînă cînd planul lor va fi perpendicular pe planul foii. Se obține astfel o cutie fără capac în formă de prismă regulată, avînd ca bază octogonul $A_1'A_2' \dots A_6'$ și înălțimea $||MM'|| = x$.

Dacă notăm $||OM|| = a$, $||OM'|| = a'$, apotema poligonului dat și a poligonului de bază, cu S și S' ariile acestor poligoane, în baza unei teoreme cunoscute¹ putem scrie :

$$\frac{S'}{S} = \frac{a'^2}{a^2}; \quad S' = \frac{S}{a^2} a'^2 = \frac{S}{a^2} (a - x)^2.$$

Funcția a cărei maxim se caută, adică volumul prisme va fi :

$$V = S' \cdot x = \frac{S}{a^2} (a - x)^2 \cdot x = k(a - x)^2 \cdot x = k \cdot u^2 \cdot v.$$

Cum $u + v = a - x + x = a = \text{constant}$, în baza teoremei de maxim T_2 (cazul particular $m=2$), produsul $u^2 \cdot v$ va fi maxim atunci cînd $u = 2v$; sau $a - x = 2x$; $x = a : 3$.

Dacă notăm cu $l = ||A_1A_2|| = ||A_2A_3|| = \dots = ||A_nA_1||$, latura poligonului dat, din figura 8 se deduce :

$$||MA_1|| = ||OM|| \operatorname{tg} \alpha; \quad l = 2a \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2a \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right);$$

$$\max V = \frac{S}{a^2} \left(a - \frac{a}{3} \right)^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{4aS}{27} = \frac{2nla^3}{27} = \frac{nl^3}{54} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

Observații: — Se constată că mărimea $||MM'|| = x$ ce corespunde lui V max este egală cu $1/3$ din apotema poligonului dat.

¹ Raportul ariilor a două poligoane regulate, este egal cu pătratul raportului lungimilor laturilor sau apotemelor.

— Pentru $n = 3, 4, 6, 8$ se obțin rezultatele din tabela :

n	3	4	6	8
α	$\frac{l\sqrt{3}}{18}$	$\frac{l}{6}$	$\frac{l\sqrt{3}}{6}$	$\frac{l(1+\sqrt{2})}{6}$
$V_{\max}$	$\frac{l^3}{54}$	$\frac{2l^3}{27}$	$\frac{l^3}{3}$	$\frac{4l^3(3+2\sqrt{2})}{27}$

în care înălțimea x a cutiei precum și $V_{\max}$ au fost exprimate în funcție de latura l a poligonului dat.

— Pentru cutiile cu baza un pătrat (cele mai frecvente în practică) situația se prezintă ca în fig. 9. După decuparea pătrățelelor hașurate, dreptunghiurile rămase se vor îndoi de-a lungul liniilor punctate, perpendicular pe planul foii.

Se va obține astfel o cutie în formă de prismă cu baza un pătrat a cărei volum va fi maxim și egal $\frac{2}{27}$ din volumul cubului de latură egală cu latura pătratului dat ($V = 2l^3/27$).

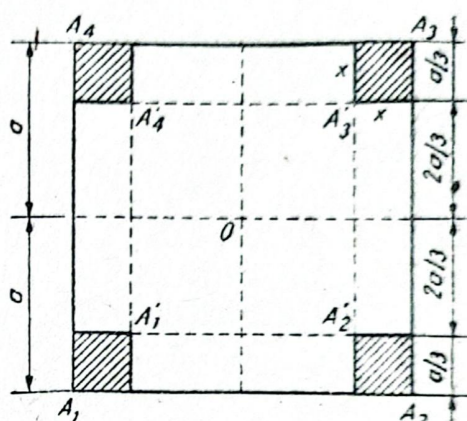


Fig. 9.

6. Dintr-o foaie de carton (sau alt material) de forma unui poligon regulat cu n laturi, se cere să se construiască o cutie în formă de piramidă regulată dreaptă, a cărei bază să fie un poligon regulat cu același număr de laturi astfel încât capacitatea ei să fie maximă.

Soluție. Considerăm octogonul regulat $A_1A_2 \dots A_8$ (fig. 10) și notăm: $||OA_1|| = R$, raza cercului circumscris poligonului $A_1A_2 \dots A_8$; $||OM|| = a'$, apotema poligonului de bază $A_1A_2 \dots A_8$; $||MA_1|| = x$ apotema piramidei obținută după decuparea triunghiurilor hașurate și îndoirea triunghiurilor rămase pînă cînd se întîlnesc toate într-un singur punct (vîrfurile piramidei).

În general, în cazul unui poligon cu n laturi se obține succesiv:

$$\frac{S'}{S} = \frac{a'^2}{a^2};$$

$$S' = \frac{S}{a^2} a'^2 = \frac{S}{a^2} (R - x)^2,$$

unde a, a' sînt apotemele iar S, S' ariile poligoanelor $A_1A_2 \dots A_n$ și respectiv $A'_1A'_2 \dots A'_n$.

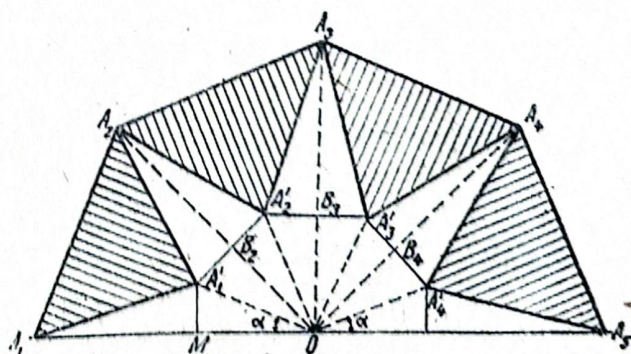


Fig. 10.

Când A_1 ajunge în vârful piramidei, se obține triunghiul dreptunghic OA_1M în care $||OA_1|| = i$, este înălțimea piramidei.

Se deduce:

$$i^2 = x^2 - a'^2;$$

$$i = \sqrt{x^2 - (R - x)^2} = \sqrt{2Rx - R^2};$$

$$V = \frac{S'i}{3} = \frac{S}{a^2} (R - x)^2 \cdot \sqrt{2Rx - R^2} = k(R - x)^2 \cdot \sqrt{2Rx - R^2}.$$

Maximul lui V se va realiza odată cu

$$\begin{aligned} \max (2R)^4 \cdot V^2 &= (2R)^4 \cdot k^2 (R - x)^4 \cdot (2Rx - R^2) = \\ &= k^2 \cdot (2R^2 - 2Rx)^4 \cdot (2Rx - R^2); \end{aligned}$$

$$V^2 = cu^4 \cdot v; \quad c = k^2 = (2R)^4; \quad u = 2R^2 - 2Rx; \quad v = 2Rx - R^2.$$

În baza teoremei de maxim T_3 (cazul particular $n = 4$), produsul $u^4 \cdot v$ (în care suma $u + v = 2R^2 - 2Rx + 2Rx - R^2 = R^2 = \text{constant}$) va fi maxim atunci când $u = 4v$; sau: $2R^2 - 2Rx = 4(2Rx - R^2)$, din care se obține $x = 3R/5$.

Cum din $\triangle OA_1B$; $||OB|| = ||OA_1|| \cos \alpha$; $a = R \cos \alpha$; $R = a \sec \alpha$;
 $x = \frac{3a}{5} \sec \alpha$; $\max V = \frac{S}{3a^2} \left(R - \frac{3R}{5}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{6R^2}{5} - R^2} = \frac{4\sqrt{5}}{375} \cdot \frac{SR^2}{a^2}$; $l = 2R \sin \alpha$.

Dar

$$S = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{nla}{2} = \frac{nl}{2} \cdot R \cdot \cos \alpha = nR^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\max V = \frac{4\sqrt{5}}{375} \cdot nR^3 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Observații: — Se constată că apotema piramidei ce corespunde lui $V_{\max}$ este egală cu $3/5$ din raza cercului circumscris poligonului dat $A_1A_2 \dots A_n$.

n	3	4	6	8
l	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R	$\frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$V_{\max}$	$\frac{4\sqrt{15}}{125} R^3$	$\frac{16\sqrt{5}}{375} R^3$	$\frac{8\sqrt{15}}{375} R^3$	$\frac{32\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{375} R^3$

— Pentru $n = 3, 4, 6, 8$ se obțin rezultatele din tabelă.

— Construcția cutiei este posibilă dacă

$$0 \leq a' \leq \frac{R}{2}$$

așa cum se vede din figura 10 ($||OM|| \leq ||OA_1|| : 2$). Cazurile limită

$$a' = \frac{R}{2} \text{ și } a' = 0$$

conduc la un volum nul.

— Pentru $n=4$, construcția este dată în figura 11. După decuparea triunghiurilor hașurate și îndoirea triunghiurilor rămase de-a lungul dreptelor $A_1A'_2$, $A_2A'_3$, $A_3A'_4$, $A_4A'_1$ pînă cînd se întîlnesc într-un vîrf comun, se obține o piramidă regulată dreaptă cu baza un pătrat. Dacă $a' = 2R : 5$, volumul este maxim și egal cu $16R^3 \sqrt{5} : 375$.

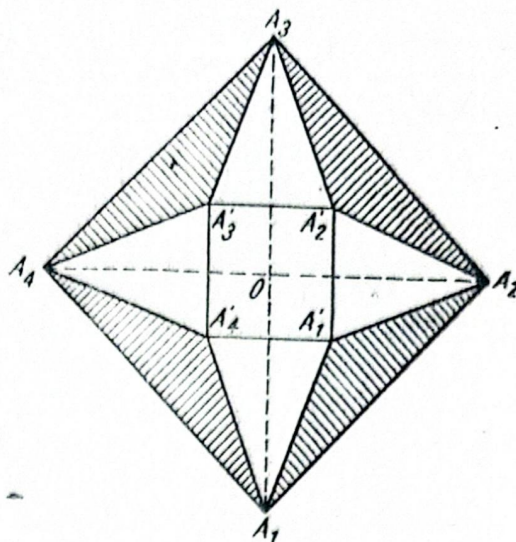


Fig. 11.

7. Dintr-o foaie de tablă circulară de rază R se cere să se construiască o pîlnie conică de volum maxim.

Soluție. Din cercul dat se scoate un sector circular ce corespunde unui unghi la centru

$\widehat{AOB} = \alpha$ (fig. 12).

După scoaterea sectorului AOB și alipirea razelor OA și OB se obține un con, în care lungimea arcului AMB devine lungimea cercului de bază a conului, iar $||OA|| = ||OB|| = R$ devin generatoare ale conului.

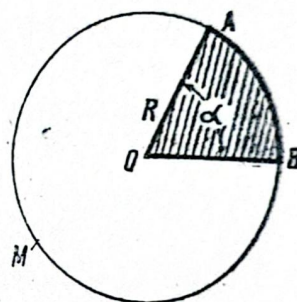


Fig. 12.

Dacă notăm cu r și i , raza și înălțimea conului, din fig. 13 se deduce succesiv:

$$2\pi r = \frac{\pi R(360^\circ - \alpha)}{180^\circ} = 2\pi R x;$$

$$r = Rx;$$

$$x = (360^\circ - \alpha) : 360^\circ.$$

Cum înălțimea i a conului se poate găsi [din $\triangle COO'$ (fig. 13);

$$i^2 = R^2 - r^2; \quad i = \sqrt{R^2 - R^2 x^2} = R \sqrt{1 - x^2};$$

funcția a cărei maxim se caută, adică volumul conului, va fi:

$$V = \frac{\pi r^2 i}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot R^2 x^2 \cdot R \sqrt{1 - x^2} = k x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}; \quad k = \pi R^3 : 3.$$

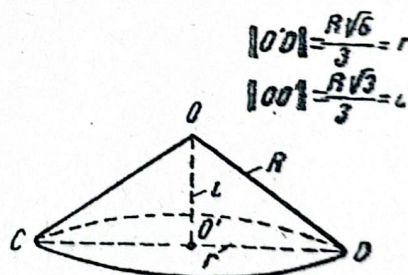


Fig. 13.

Maximul lui V are loc odată cu $\max V^2 = \max k^2 x^4 (1 - x^2) = k^2 \max (x^2)^3 (1 - x^2) = k^2 \max u^3 \cdot v$; unde $u = x^2$; $v = 1 - x^2$.

Cum $u + v = x^2 + 1 - x^2 = 1 = \text{constant}$, în baza teoremei de maxim T_1 (cazul particular $n = 2$), produsul $u^3 \cdot v$, este maxim dacă $u = 2v$ sau $x^2 = 2(1 - x^2)$. Se deduce:

$$x = \frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \alpha = 360^\circ - 120^\circ \sqrt{6}; \quad \alpha = 66^\circ 3' 40'';$$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{3} R; \quad i = \frac{\sqrt{3}}{3} R; \quad \max V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \cdot R^3 \approx \frac{2}{5} R^3.$$

Probleme propuse

1. Un trunchi de arbore de formă cilindrică cu diametrul d trebuie transformat într-o grindă de secțiune dreptunghiulară, astfel încât să prezinte maximum de rezistență la încovoiere.

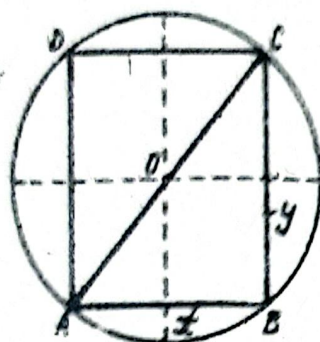


Fig. 14.

R. Dacă notăm cu x și y cele două dimensiuni ale secțiunii dreptunghiulare (fig. 14) rezistența la încovoiere este maximă odată cu modulul de rezistență al secțiunii transversale a grinzii, care este dat de expresia:

$$W = x^2 : 6,$$

sau

$$36 W^2 = x^2 \cdot (y^2).$$

Cum $x^2 + y^2 = d^2$, max W are loc dacă $y^2 = 2x^2$. Se va găsi $x = d\sqrt{3} : 3$; $y = d\sqrt{6} : 3$; $\max W = d^2\sqrt{3} : 27$.

2. Dintr-o foaie de tablă de a decimetri lățime se confecționează un jgheab a cărei secțiune este un trapez. În acest scop, tabla se îndoaie în lungime pe ambele părți cu câte o fișie de aceeași lățime, astfel ca pereții laterali să formeze cu fundul jgheabului unghiuri de 60° (fig. 15).

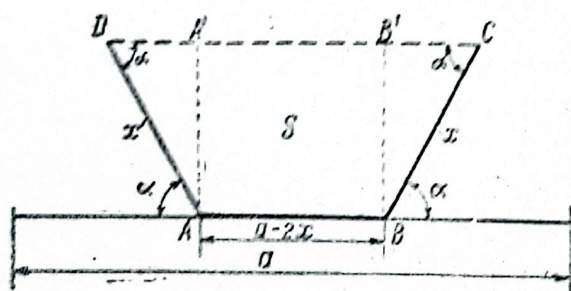


Fig. 15.

Ce lățime trebuie să aibă fișile îndoite, pentru ca debitul apei care se scurge prin acest jgheab să fie maxim?

R. Maximul debitului Q se va realiza odată cu maximul secțiunii prin jgheab, care este trapezul $ABCD$.

Funcția al cărui maxim se caută este $S = \sqrt{3}(2ax - 3x^2) : 4$.

Max S se va realiza odată cu maximul binomului $(2ax - 3x^2)$, sau cu max $3x(2a - 3x)$. Cum $3x + 2a - 3x = 2a = \text{const.}$ max S are loc când $3x = 2a - 3x$, sau $x = a/3$. max $S = a\sqrt{3} : 12$.

3. Se cere capacitatea maximă a unui cilindru deschis la un capăt (pahar cilindric), știind că suprafața lui (S) este dată.

R. Dacă notăm cu x și y , raza și înălțimea cilindrului, se cere $\max V = \max \pi x^2 y$, știind că $2\pi xy + \pi x^2 = \pi(2xy + x^2) = S$; $V^2 = \pi^2 x^4 y^2 = (\pi/2)^2 \cdot (2xy)^2 \cdot x^2$. Suma $2xy + x^2$ fiind constantă $\max V$ are loc când $2xy = 2x^2$, sau $x = y = \sqrt{S : 3}$; $\max V = \sqrt{S^3 : 27\pi}$.

Așa se construiesc unele măsuri de volum, pentru a economisi materialul din care sînt confecționate, sau pentru a le face mai ușoare.

4. Se cere să se construiască un rezervor cilindric a cărui suprafață totală $S = 6\pi m^2$, astfel încît capacitatea lui să fie maximă.

R. Dacă notăm cu x și y raza și înălțimea cilindrului; se cere $\max V = \max \pi x^2 y$, știind că $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy = \text{constant}$.

Capacitatea maximă se va obține atunci cînd înălțimea este egală cu diametrul de bază; $y = 2x$. Se va găsi $x = \sqrt{S : 6\pi}$, $y = 2\sqrt{S : 6\pi}$; $\max V = \frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. În exemplul dat: $x = 1m$, $y = 2m$, $\max V = 2\pi m^3$.

5. Într-un semicerc se duc coarde paralele cu diametrul, care prin rotirea lor în jurul diametrului dau cilindre circulare drepte. Care dintre ele este maxim?

R. Fie r raza semicercului și $2x$ lungimea coardei. Se obține $V = 2\pi x \cdot (r^2 - x^2)$, $\max V$ se va realiza atunci cînd $x = r\sqrt{3} : 3$; iar $\max V = 4\pi \cdot r^3 \sqrt{3} : 9$.

6. Dintre toate conurile cu suprafața laterală dată (S), care este acela cu volum maxim?

R. Dacă notăm cu x , y raza și înălțimea conului, se obține:

$$\max V^2 = \max \cdot x^4 (x^2 y^2)^2, S = \pi x \sqrt{x^2 + y^2}; x^4 + x^2 y^2 = c; x^2 y^2 = 2x^4; y^2 = 2x^2.$$

$$\text{Se va găsi } y = x\sqrt{2}; x = \sqrt[4]{S^2 : 3\pi^2}; y = \sqrt[4]{4S^2 : 3\pi^2}.$$

7. Dintre toate conurile cu suprafața totală dată (S) care este acela cu volumul maxim?

R. Folosind aceleași notații ca în problema 6, găsim:

$$S = \pi x^2 + \pi xg = \pi x(x + g), V = \frac{\pi}{3} x^2 y; g = x^2 + y^2.$$

$$\text{Se va găsi } g = 3x; y = 2\sqrt{2}x; \max V = \sqrt{S^3 : 72\pi}.$$

8. Care este cilindrul de volum maxim înscris într-un con dat (de rază r și înălțimea h)?

R. Dacă notăm cu x , y și V , raza, înălțimea și volumul cilindrului căutat, din figura 16 se constată că $\triangle AOC \sim \triangle A'O'C$.

Se deduce $r : x = (h - y) : h$, $x = r(h - y) : h$, $V = \pi r^2 (h - y)^2 \cdot y : h^2$. $\max V$ se obține odată cu maximul produsului $(h - y)^2 y$. Cum suma factorilor $h - y + y = h$ este constantă $\max V$ are loc atunci cînd $h - y = 2y$.

$$\text{Se obține } y = h : 3; x = \frac{2r}{3}; \max V = \frac{4\pi r^2 h}{27} = \frac{4}{9} V.$$

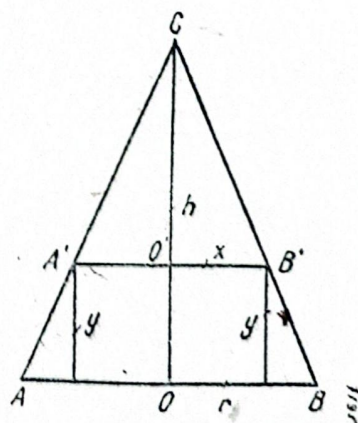


Fig. 16.

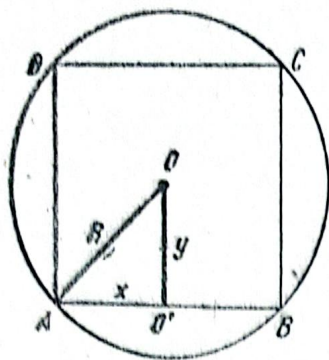


Fig. 17.

9. Care este cilindrul de volum maxim înscris într-o sferă de rază dată R ?

R. Folosind notațiile din figura 17 se obține:

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

$$V = 2\pi x^2 y;$$

$$V^2 = 4\pi^2 (x^2)^3 \cdot y^2.$$

Cum $x^2 + y^2 = R^2$; $\max V$ are loc pentru $x^2 = 2y^2$. Rezultă: $x = R\sqrt{6}:3$; $y = R\sqrt{3}:3$; $\max V = 4\pi R^3 \sqrt{3}:9$.

10. Care este cilindrul cu aria laterală maximă înscris într-o sferă de rază dată R ?

R. Din fig. 17 se obține: $x^2 + y^2 = R^2$; $S = 4\pi xy$; $S^2 = 16\pi^2 \cdot x^2 y^2$. Cum $x^2 + y^2 = R^2 = \text{constant}$, $\max S$ are loc atunci când $x = y$. Înălțimea cilindrului trebuie să fie cât diametrul cercului ($i = 2r$).

$\max S = 2\pi R^2$ și are loc pentru $x = y = R\sqrt{2}:2$. Suprafața laterală maximă a cilindrului este egală cu suprafața semisferei.

11. Un con cu raza bazei r și înălțimea h este înscris într-o sferă de rază R . Se face o secțiune cu un plan paralel cu baza conului. Se cere distanța $d(C, O')$ de la vârful conului la plan pentru care coroana circulară dintre sferă și con să fie de arie maximă.

R. Folosind notațiile din fig. 18 se obține:

$$S = \pi(|O'N|^2 - |O'M|^2).$$

Cum

$$|O'N|^2 = |CO'| \cdot |C'O| = CO' \cdot (2R - |CO'|),$$

iar din

$$\triangle MCO' \sim \triangle ACO;$$

$$|MQ'| : |CO'| = |AO| : |CO| = r : h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MO'| = |CO'| \cdot r : h$$

și

$$r^2 + h^2 = |AC|^2 = |CC'| \cdot |CO| = 2R \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2\pi R \cdot |CO'| \cdot (h - |CO'|) : h.$$

Cum

$$|CO'| + h - |CO'| = h = \text{constant},$$

$\max S$ are loc pentru

$$|CO'| = h : 2; \max S = \pi R h : 2.$$

12. Se cere conul de volum maxim, știind că are vârful în centrul unei sfere de rază R și baza un cerc mic situat pe sferă.

R. Folosind notațiile din fig. 19 se va găsi: $V = \pi x^2 y : 3 = \pi y(R^2 - y^2) : 3$; $V^2 =$

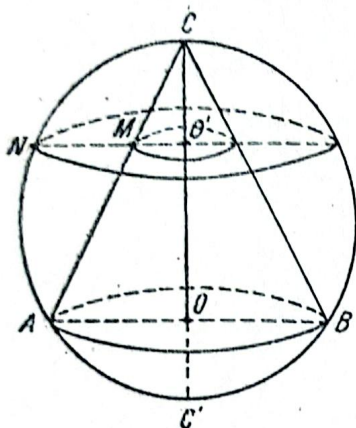


Fig. 18.

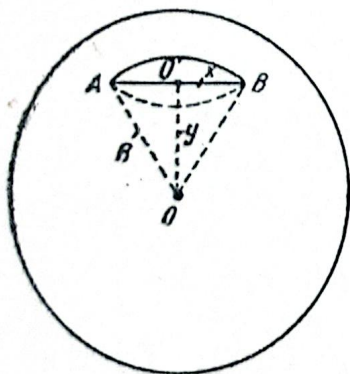


Fig. 19.

$= \pi^2(R^2 - y^2)^2 \cdot y^2 : 9$; $R^2 - y^2 + y^2 = R^2 = \text{constant}$ și deci $\max V$ are loc atunci când $R^2 - y^2 = 2y^2$; $y = R\sqrt{3} : 3$; $x = R\sqrt{6} : 3$; $\max V = 2\pi R^3 \sqrt{3} : 27$.

§ 2. Probleme de minim

1. Volumul unui rezervor cilindric fără capac este $64\pi \text{ m}^3$. Se cer dimensiunile cilindrului pentru care costul tablei din care este confecționat rezervorul să fie minim.

Soluție. Dacă notăm $r = x$ și $h = y$ raza și înălțimea cilindrului, funcția a cărei minim se cere este:

$$S = \pi x^2 + 2\pi xy = \pi(x^2 + 2xy).$$

Cum prin ipoteză $V = \pi x^2 y = 64\pi = \text{constant}$, rezultă că și $V^2 = \pi^2 x^4 y^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot (2xy)^2 \cdot (x^2) = (64\pi)^2 = \text{constant}$.

Dacă notăm $u = 2xy$; $v = x^2$; avem $u \cdot v = k$. În baza teoremei de minim T_3 (cazul particular $m = 2$, $n = 1$), suma $u + v$ (și deci aria S) va fi minimă dacă $u = 2v$, sau $2xy = 2x^2$.

Se obține $x = y$ (sau $r = h$). Raza cilindrului va fi egală cu înălțimea și deci $\pi x^2 \cdot x = 64\pi$; $x^3 = 64$; $x = y = 4 \text{ m}$.

Minimul ariei din care va fi confecționat rezervorul va fi:

$$\min S = \min \pi(x^2 + 2xy) = (4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 4)\pi = 48\pi \text{ m}^2.$$

2. Dintre toate triunghiurile de aceeași arie, care este triunghiul de perimetru minim?

Soluție. Aria triunghiului este dată de formula:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

Cum prin ipoteză este constantă, rezultă:

$$(p-a)(p-b)(p-c) = S^2 : p = \text{constant}.$$

În baza teoremei de minim T_1 (cazul particular $p = 1$, $n = 3$).

Suma $(p-a) + (p-b) + (p-c) = 3p - (a+b+c) = 3p - 2p = p$, și deci perimetrul triunghiului va fi minim dacă factorii sînt egali: $p-a = p-b = p-c$. Rezultă $a = b = c$, adică triunghiul echilateral are perimetrul minim.

3. Să se determine pe latura $|BC|$ a unui triunghi oarecare ABC un punct M astfel încît suma pătratelor distanțelor la cele 3 vîrfuri să fie minimă.

Soluție. Notăm cu A' piciorul perpendicularei din A pe latura $|BC|$; $\|AA'\| = a$; $\|BA'\| = b$; $\|CA'\| = c$; $\|A'M\| = x$ (fig. 20).

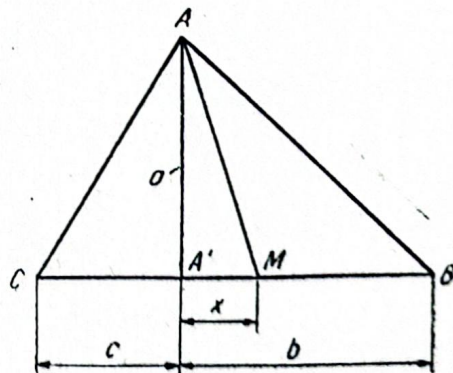


Fig. 20

Funcția a cărei maxim se cere este suma :

$$S = ||MA||^2 + ||MB||^2 + ||MC||^2 = (a^2 + x^2) + (b - x)^2 + (c + x)^2 = \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 3x^2 - 2bx + 2cx = a^2 + b^2 + c^2 + x[3x - 2 \cdot (b - c)].$$

Suma S va fi minimă dacă $x[2(b - c) - 3x]$ sau $3x[2(b - c) - 3x]$ va fi maximă. Cum $3x + 2(b - c) - 3x = 2(b - c) = \text{constant}$, produsul $3x[2(b - c) - 3x]$ va fi maxim când factorii sînt egali :

$$3x = 2(b - c) - 3x, \text{ sau } x = (b - c) : 3.$$

$$\min S = a^2 + b^2 + c^2 - (b - c)^2 : 3.$$

Observație. Dacă triunghiul este isoscel sau echilateral $b = c$; $x = 0$, punctul M coincide cu piciorul înălțimii $|AA'|$ · $\min S = a^2 + b^2 + c^2$.

4. Să se determine dimensiunile unei cutii paralelipipedice fără capac de volum dat V știind că dimensiunile bazei sînt într-un raport constant k , astfel ca suprafața totală să fie minimă.

Soluție. Notăm cu x, y dimensiunile bazei, cu z înălțimea, cu S aria cutiei fără capac și cu V volumul.

Se obține :

$$y : x = k ; y = kx ; V = xyz = kx^2z, \quad (3)$$

$$S = xy + 2xz + 2yz = kx^2 + 2(1 + k)xz. \quad (4)$$

Eliminăm pe z între relațiile (3) și (4) :

$$S = 2V(1 + k) : kx + kx^2.$$

Dacă notăm :

$u = 2V(1 + k) : kx$; $v = kx^2$; se constată că : $u^2 \cdot v =$
 $= 4V^2(1 + k)^2 : k^2x^2 \cdot kx^2 = 4V^2(1 + k)^2 : k = \text{constant}$, și deci în baza teoremei de minim T_3 (cazul particular $m = 2, n = 1$) suma $S = u + v$ va fi minimă dacă $u = 2v$, sau $2V(1 + k) : kx = 2kx^2$. Se deduce :

$$x^3 = \frac{V(1 + k)}{k^2} ; y^3 = Vk(1 + k) ; z^3 = \frac{Vk}{(1 + k)^2} ;$$

$$xy = (1 + k) \sqrt[3]{\frac{V^2}{k(1 + k)}} ; xz = \sqrt[3]{\frac{V^2}{k(1 + k)}} ; yz = k \sqrt[3]{\frac{V^2}{k(1 + k)}}.$$

$$\min S = xy + 2xz + 2yz = 3\sqrt[3]{V^2 \cdot (1 + k)^2 : k}.$$

În cazul particular $x = y$; avem $k = 1$; $x = y = \sqrt[3]{2V}$; $z = \sqrt[3]{2V} : 2$; sau $2z = x = y$; $\min S = 3\sqrt[3]{4V^2}$. Înălțimea cutiei este egală cu jumătate din latura bazei.

Exemplu. Dacă $V = 4 \text{ dm}^3$; $x = y = 2 \text{ dm}$; $z = 1 \text{ dm}$; $\min S = 12 \text{ dm}^2$.

Observație. Soluția optimă ne permite să construim cutii sau rezervoare paralelipipedice de capacitate dată (fără capac) avînd raportul dimensiunilor bazei cunoscut, astfel încît costul materialului (tablă, carton, lemn, ...) folosit să fie minim, și în același timp să fie mai ușoare.

5. Se cer dimensiunile unui rezervor paralelipipedic cu capao, avind capacitatea $V = 125 \text{ m}^3$, astfel încît costul tablei din care este construit să fie minim.

Soluție. Dacă notăm cu x, y, z dimensiunile cutiei, se cere minimul funcției $S = 2(xy + yz + zx)$, cu condiția $V = xyz = 125$. Cum $V^2 = x^2y^2z^2 = (xy)(yz)(zx) = 125^2 = \text{constant}$, în baza teoremei de minim T_1 (cazul particular $p = 1; n = 3$), suma lor $xy + yz + zx$ este minimă dacă $xy = yz = zx$, sau $x = y = z$. Din $xyz = 125$ rezultă $x^3 = 125$; $x = y = z = 5$.

Minimul ariei totale va fi: $\min S = 2(25 + 25 + 25) = 150 \text{ m}^2$.

Suprafața rezervorului și deci costul tablei va fi minim, dacă rezervorul va fi un cub cu latura de 5 m.

6. Fie OX, OY două șosele perpendiculare $OX \perp OY$ și A, B două localități situate în interiorul unghiului XOY . Să se determine punctele $M \in OX$ și $N \in OY$, astfel încît costul drumului $AMNB$ să fie minim.

Soluție. Dacă A' este simetricul lui A față de axa OX iar B' simetricul lui B față de axa OY drumul $AMNB$ este egal cu drumul $A'MNB'$ deoarece

$$||AD|| \equiv ||A'D||$$

iar

$$||BE|| \equiv ||B'E||.$$

Drumul minim va fi egal cu distanța cea mai scurtă între punctele $A'B'$ (fig. 21).

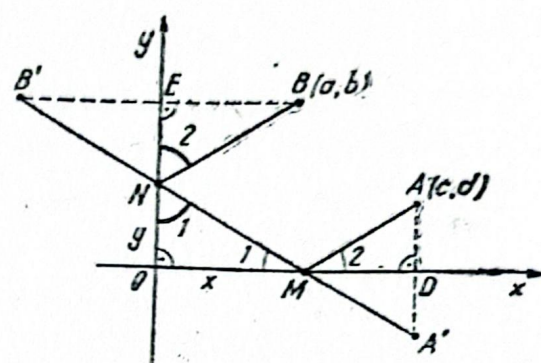


Fig. 21.

Punctele M și N se obțin astfel: se construiesc punctele A', B' simetrice față de OX respectiv OY , apoi se unesc. Intersecția dreptei $A'B'$ cu axele OX, OY ne vor da punctele M respectiv N .

Folosind notațiile $||OM|| = x; ||ON|| = y; ||OD|| = c; ||AD|| = d; ||OE|| = b; ||BE|| = a$ și ținînd seama că $\triangle AMD \sim \triangle OMN \sim \triangle NBE$ (avînd $\hat{O} \equiv \hat{D} \equiv \hat{E} = 90^\circ, \hat{M}_1 \equiv \hat{M}_2, \hat{N}_1 \equiv \hat{N}_2$) găsim proporțiile:

$$x : y = (c - x) : d; \quad x : y = a : (b - y).$$

Se deduce:

$$x = \frac{bc - ad}{b + d} = ||OM||;$$

$$y = \frac{bc - ad}{a + c} = ||ON||.$$

7. Dintre segmentele sferice cu volum constant, să se determine acela cu aria calotei minimă.

Soluție. Dacă notăm $||CO'|| = x = \text{înălțimea segmentului sferic}$, și cu R raza sferei (fig. 22), avem $V = \pi x^2(3R - x) : 3 = \text{constant}$. Se cere minimul ariei $S = 2\pi Rx$. Dar $\min Rx$ se va realiza odată cu $\max 1 : Rx$ știînd că $x^2(3R - x) = 3V : \pi = c^3$,

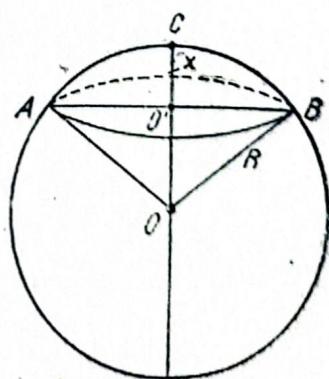


Fig. 22.

relație care se poate scrie $(c^3 : Rx^2) + (x : R) = 3$. Se observă însă că : $\left(\frac{c^3}{Rx^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{R}\right) = \left(\frac{c^2}{Rx}\right)^3$, care este maximă odată cu $\frac{1}{Rx}$.

În baza teoremei de maxim T_3 (cazul particular $m = 2; n = 1$) maximul produsului are loc când $c^3 : Rx^2 = 2(x : R)$ sau $c^3 = 2x^3$. Înlocuind pe c^3 în relația de condiție găsim :

$$2x^3 : Rx^2 + x : R = 3,$$

de unde $x = R$. Calota cerută este o semisferă.

8. Să se determine poziția T de amplasare a unei uzine termoelectrice ce urmează a deservi 3 localități A, B, C nesituate în linie dreaptă, astfel încât lungimea conductelor (deci și costul instalației) care leagă uzina cu cele 3 localități să fie minimă.

Soluție. Problema se poate enunța astfel : să se determine poziția unui punct T situat în interiorul unui triunghi ABC astfel ca suma $S = ||TA|| + ||TB|| + ||TC||$ să fie minimă.

Din punctul T care satisface condiția de minim, laturile triunghiului se văd sub un unghi de 120° ($\widehat{ATB} \equiv \widehat{BTC} \equiv \widehat{CTA} = 120^\circ$).

Demonstrație. Rotim triunghiul BCT cu 60° în jurul vârfului C (fig. 23). Rezultă $|CB''| \equiv |CB|$; $|CT'| \equiv |CT|$. Triunghiul TCT' avînd

$|CT| \equiv |CT'|$ și $\widehat{TCT'} = 60^\circ$ este echilateral și deci $|TT'| \equiv |TC|$. În mod analog se arată că $\triangle BCB''$ este echilateral avînd $|CB| \equiv |CB''|$

și $\widehat{BCB''} = 60^\circ$; deci $|BB''| \equiv |BC| \equiv |B''C|$.

$\triangle CT'B''$ este noua poziție a $\triangle BTC$, după rotirea acestuia cu 60° , eci $|TB| \equiv |T'B''|$, iar suma $S = ||TA|| + ||TC|| + ||TB|| = ||TA|| + ||TT'|| + ||T'B''||$. Dar drumul $||AT|| + ||TT'|| + ||T'B''||$ va fi cel mai scurt atunci cînd T și T' vor fi situate pe dreapta AB'' care este fixă (B'' are o poziție independentă de T). Deci, punctul T va fi pe dreapta care unește vârful A cu vârful B'' al triunghiului echilateral construit pe latura BC . În mod analog punctul T se află pe dreptele

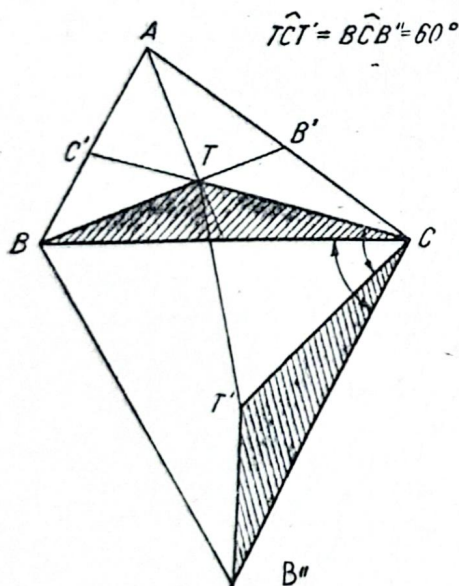


Fig. 23.

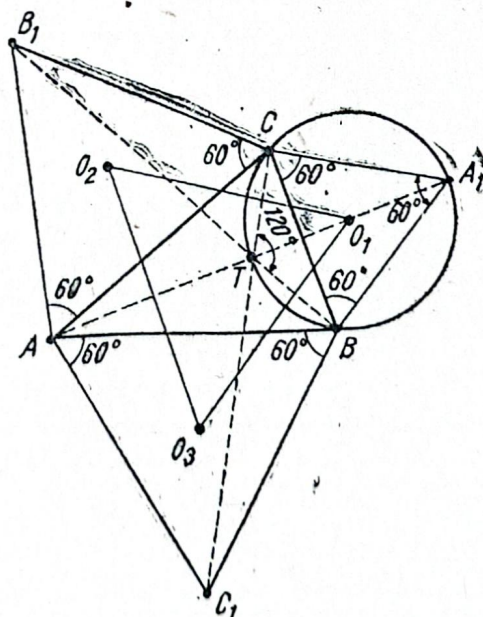


Fig. 24.

care unesc vîrfurile B și C cu vîrfurile B_1 și C_1 ale triunghiurilor echilaterale construite pe laturile $|AC|$ și $|AB|$ (fig. 24).

Cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale construite pe laturile triunghiului ABC se numesc cercurile lui Torricelli¹, iar punctul T care satisface proprietatea de minim se numește „punctul lui Torricelli”.

Punctul T se obține, construind în afara triunghiului ABC , triunghiurile echilaterale ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 și unind vîrfurile opuse. Din figura

24 rezultă $\widehat{ATB} \equiv \widehat{BTC} \equiv \widehat{CTA} = 120^\circ$ (c.c.t.d).

Calculul sumei $||TA|| + ||TB|| + ||TC||$.

Vom arăta mai întîi că $||TB|| + ||TC|| = ||TA_1||$. Patrulaterul TBA_1C fiind inscriptibil ($\widehat{BTC} + \widehat{BA_1C} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$), teorema lui Ptolemeu ne conduce la relația:

$$||TA_1|| \cdot ||BC|| = ||A_1C|| \cdot ||TB|| + ||A_1B|| \cdot ||TC||. \quad (5)$$

(Produsul diagonalelor într-un patrulater inscriptibil este egal cu suma produselor laturilor opuse).

Cum triunghiul BCA_1 este echilateral $|BC| \equiv |A_1C| \equiv |A_1B|$. După simplificare relația (5) devine $||TB|| + ||TC|| = ||TA_1||$ (c.c.t.d).

Rezultă că

$$||TA|| + ||TB|| + ||TC|| = ||TA|| + ||TA_1|| = ||AA_1||.$$

Pentru a obține pe $||AA_1||$ aplicăm teorema cosinusului în triunghiul

$$\begin{aligned} AA_1B: ||AA_1||^2 &= ||AB||^2 + ||A_1B||^2 - 2||AB|| \cdot ||A_1B|| \cdot \cos \widehat{ABA_1} = \\ &= c^2 + a^2 - 2ac \cos(\widehat{B} + 60^\circ) = c^2 + a^2 - ac \cos \widehat{B} + ac\sqrt{3} \sin \widehat{B}. \end{aligned} \quad (6)$$

Aceeași teoremă aplicată în $\triangle ABC$ ne dă:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \widehat{B}; \quad -ac \cos \widehat{B} = (b^2 - c^2 - a^2) : 2 \quad (7)$$

Din formula ariei unui triunghi $S = ac \sin \widehat{B} : 2$;

$$ac \sin B = 2S. \quad (8)$$

Folosind (7) și (8), relația (6) devine:

$$||AA_1||^2 = a^2 + c^2 + (b^2 - c^2 - a^2) : 2 + 2S\sqrt{3}.$$

Suma minimă va fi:

$$\begin{aligned} ||TA|| + ||TB|| + ||TC|| &= ||AA_1|| = ||BB_1|| = ||CC_1|| = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3})^{1/2}. \end{aligned}$$

Observații: — Dacă unghiul $\widehat{A} < 120^\circ$, punctul T se află în interiorul triunghiului ABC ;

¹ Torricelli Evangelista (1608–1647), a fost elevul preferat al lui Galileo Galilei (1564–1642).

— Dacă unghiul $\hat{A} = 120^\circ$, punctul T coincide cu vârful A . În acest caz $||TA|| + ||TB|| + ||TC|| = ||AB|| + ||AC|| = b + c$.

— Dacă unghiul $\hat{A} > 120^\circ$, punctul T este exterior triunghiului, dar suma $||TA|| + ||TB|| + ||TC||$ nu mai este minimă. În acest caz suma minimă se obține atunci când T coincide cu A .

$$||TA|| + ||TB|| + ||TC|| = b + c.$$

— În cazul $\hat{A} < 120^\circ$; din punctul T laturile triunghiului se văd sub un unghi de 120° .

— Se poate arăta că $\Delta O_1 O_2 O_3$ care unește centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 este tot echilateral¹

$$||O_1 O_2|| = ||O_2 O_3|| = ||O_3 O_1|| = \frac{\sqrt{6}}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3})^{1/2}.$$

Triunghiul echilateral $O_1 O_2 O_3$ poartă numele de „triunghiul exterior al lui Napoleon”.

În mod analog $\Delta O'_1 O'_2 O'_3$ care unește centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale ABC'_1 , BCA'_1 , CAB'_1 construite în interiorul triunghiului dat ABC este tot echilateral și poartă numele de „triunghiul interior al lui Napoleon”.

$$||O'_1 O'_2|| = ||O'_2 O'_3|| = ||O'_3 O'_1|| = \frac{\sqrt{6}}{6} (a^2 + b^2 + c^2 - 4S\sqrt{3})^{1/2}.$$

Probleme propuse

1. Dintr-o bară metalică de formă cilindrică trebuie să construim bare paralelipipedice. Se cer dimensiunile dreptunghiului de secțiune, astfel încât pierderea de material să fie minimă.

R. Dacă x , y sînt dimensiunile dreptunghiului, pierderea de material va fi minimă atunci când aria $S = xy$ va fi maximă.

Cum $\max S$ se va realiza odată cu $\max S^2 = x^2 y^2$, se va găsi $x = y = R\sqrt{2}$, $S = 2R^2$. Barele trebuie să aibă secțiunea un pătrat.

2. Două orașe A și B sînt situate la 10 km și respectiv 15 km de un râu rectiliniu, iar proiecția segmentului $|AB|$ pe direcția râului este de 20 km.

Cele două orașe trebuie alimentate cu apă de la o uzină care urmează să fie construită pe marginea râului.

Se cere poziția de amplasare a uzinei, astfel încît costul conductelor care leagă cele două orașe cu uzina să fie minim.

R. Folosind datele din figura 25 se constată că $\min (||AD|| + ||DB||) = \min (||A'D|| + ||DB||)$. Cum $\Delta OAD \sim \Delta BCD$ se va găsi: $x = ad : (a + b)$.

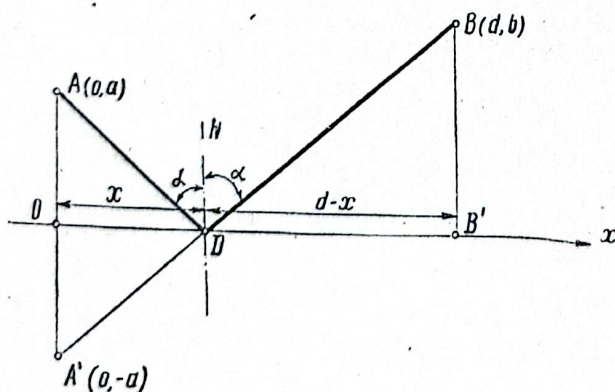


Fig. 25.

¹ Se recomandă [13] și [20].

În exemplul dat $x = 10 \cdot 20 : (10 + 15) = 200 : 25 = 8 \text{ km}$.

3. De-a lungul unei șosele rectilinii se află două șantiere de construcții A și B . La distanțele c și d de șosea se află alte două șantiere C și D .

Se cere poziția M de amplasare a unui depozit de materiale, astfel încât suma distanțelor lui la cele patru șantiere A, B, C, D să fie minimă știind că :

$$||AB|| = a = 800 \text{ m};$$

$$||CC'|| = 500 \text{ m};$$

$$||DD'|| = d = 300 \text{ m};$$

$$||C'D'|| = b = 600 \text{ m}.$$

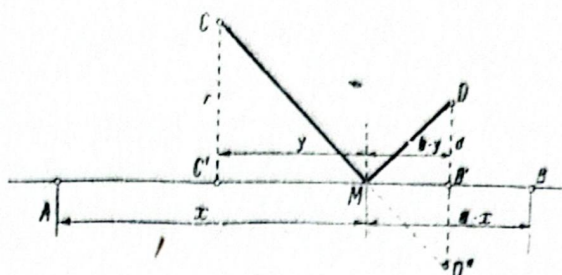


Fig. 26.

R. Funcția al cărei minim se cere este $L = x + a - x + ||MC|| + ||MD|| = a + ||MC|| + ||MD||$ (fig. 26). Se va găsi: $\min L =$

$$= a + \sqrt{b^2 + (c + d)^2} = 1800 \text{ m}; y = bc : (c + d) = 375 \text{ m}.$$

4. O bară de lungime dată are secțiunea unui dreptunghi de arie constantă. Această bară trebuie prelucrată pe toate fețele și apoi nichelată.

Se cer dimensiunile secțiunii, astfel încât costul celor două operații (frezare și nichelare) să fie minim.

R. Costul este proporțional cu perimetrul secțiunii: $C = 2c(x + y)l$; unde l este lungimea barei, c costul pe unitate de suprafață, iar x și y dimensiunile dreptunghiului.

Va trebui să găsim minimul funcției $C = k(x + y)$ știind că $xy = S =$ constant. Se va găsi $x = y = \sqrt{S}$; $\min C = 2cl\sqrt{S}$. Se va folosi teorema de minim T_1 (cazul particular $p = 1$; $n = 2$).

5. Dintre toate conurile cu volum dat, se cere acela pentru care suma razei și înălțimii este minimă.

R. Dacă notăm cu x, y, V , raza, înălțimea și volumul conului, se cere $\min (x + y)$ știind că $V = \pi x^2 y : 3$; $x^2 y = c = 3V : \pi$.

În baza teoremei de minim T_3 (cazul particular $m = 2, n = 1$), minimul are loc când $x = 2y = \sqrt[3]{c : 4}$; $\min (x + y) = 3 \sqrt[3]{3V : 4\pi}$.

6. Uneori, vopselele se vând în cutii de tablă cilindrice cu o capacitate de $v = 250 \text{ cm}^3$. Ele au o deschidere circulară, care se închide cu un capac din material plastic.

Raportul dintre diametrul acestei deschideri și diametrul cutiei este 4 : 5. Se cer dimensiunile cutiei, astfel încât costul tablei necesare confecționării ei să fie minim.

R. Folosind notațiile din fig. 27, funcția a cărei minim se cere este $f = 2\pi xz + \pi x^2 + \pi(x^2 - y^2)$, astfel ca $y = 4x : 5$; $\pi x^2 z = 250$. Se va găsi $f = 2\pi (250 : \pi x + 17x^2 : 25)$. Cum $\left(\frac{250}{\pi x}\right)^2 \cdot \left(\frac{17x^2}{25}\right) = \frac{17 \cdot 2500}{\pi^2} =$ constant, în baza teoremei de minim T_3

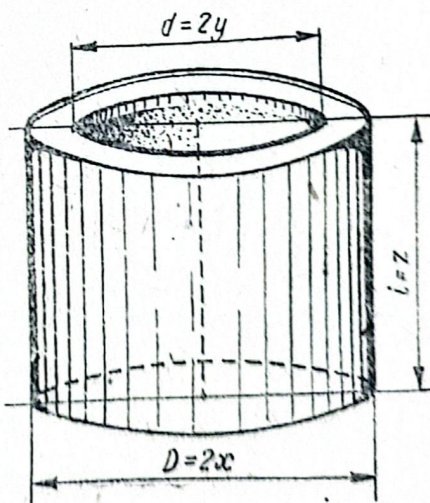


Fig. 27.

(cazul particular $m = 2, n = 1$), f va fi minimă dacă $\frac{250}{\pi x} = \frac{2 \cdot 17x^2}{25}$. Se va găsi $x = \sqrt[3]{6250 : 34\pi} = 3,88 \text{ cm}$; $D = 7,76 \text{ cm}$; $d = 6,20 \text{ cm}$; $i = 5,28 \text{ cm}$; $\min f = 0,0192 \text{ c}$, unde c este costul unui metru pătrat de tablă

7. Se cere să se determine dimensiunile unei cutii paralelipipedice fără capac, confecționată din tablă, de volum dat V (aplicație $V = 125 \text{ dm}^3$).

R. Dacă x, y, z sînt dimensiunile cutiei, se cere minimul sumei $S = xy + 2xz + 2yz$ știind că $xyz = V = \text{constant}$.

Cum $4V^2 = 4x^2y^2z^2 = (xy)(2xz)(2yz) = \text{constant}$, în baza teoremei de minim T_1 (cazul particular $p = 1, n = 3$) suma S este minimă dacă $x = y = \sqrt[3]{2V} = 5\sqrt[3]{2}$; $z = \sqrt[3]{V : 4} = 5 : \sqrt[3]{4}$; $\min S = 3\sqrt[3]{4 \cdot V^2} = 75\sqrt[3]{4}$.

CAPITOLUL III.

CALCULUL VARIAȚIEI PROCENTUALE A UNEI SUME, PRODUS SAU CÎT DE DOUĂ SAU MAI MULTE MĂRIMI VARIABILE

Marea majoritate a indicatorilor tehnico-economici folosiți în planificarea și analiza activității întreprinderilor sînt legați între ei prin relații simple, care conțin în expresia lor numai operații elementare.

Fiecare din acești indicatori cresc sau descresc față de valoarea lor planificată sau față de valorile realizate într-o perioadă oarecare de timp, cu procente pe care statistica ni le pune la dispoziție, lunar, trimestrial și anual (mărimea unor indicatori de importanță deosebită este cunoscută decadal, săptămînal, sau chiar zilnic).

De aceea este important de știut cum se calculează procentul de variație a unui indicator în funcție de variația procentuală a altor indicatori între care avem stabilite una din relațiile simple sub formă de sume, produs sau cît :

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n; \quad x = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n; \quad x = \frac{x_1}{x_2}.$$

§ 1. Variația procentuală a unei sume de două sau mai multe mărimi variabile

Fie :

$$x = x_1 + x_2 \quad (1)$$

suma a două mărimi variabile independente una de alta. Dacă x_1 și x_2 variază cu procentele p_1 și p_2 , iar x cu procentul p , se poate scrie :

$$x + \frac{p}{100} x = \left(x_1 + \frac{p_1}{100} x_1 \right) + \left(x_2 + \frac{p_2}{100} x_2 \right). \quad (2)$$

Din (1) și (2) prin scădere se obține :

$$p = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{x_1 + x_2}. \quad (3)$$

Formula (3) dă procentul p de variație a lui x , cînd fiecare din mărimile x_1 , x_2 variază cu procentele p_1 , p_2 .

Generalizare. Dacă mărimea x este o sumă de n mărimi variabile :

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

iar $p_1, p_2, \dots, p_n, p$ procente de variație respective :

$$x + \frac{p}{100} x = \left(x_1 + \frac{p_1}{100} x_1 \right) + \left(x_2 + \frac{p_2}{100} x_2 \right) + \dots + \left(x_n + \frac{p_n}{100} x_n \right)$$

se obține :

$$p = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \sum_{i=1}^n p_i x_i : \sum_{i=1}^n x_i. \quad (4)$$

Exemplu. Unui șantier de construcții i s-au prevăzut în plan, în cursul unei luni următoarele elemente de cheltuieli, care au fost depășite după cum urmează :

Nr. crt.	Natura cheltuielilor	Planificat (lei)	Depășiri %
1	Retribuții	52 000	4
2	Materiale	40 000	12
3	Combustibil	24 000	8
4	Alte cheltuieli	32 000	0
TOTAL		148 000	$p = ?$

Cu ce procent a fost depășit totalul cheltuielilor față de plan ?

Folosind formula (4), se obține :

$$p = \frac{4 \cdot 52 \cdot 10^3 + 12 \cdot 40 \cdot 10^3 + 8 \cdot 24 \cdot 10^3}{52 \cdot 10^3 + 40 \cdot 10^3 + 24 \cdot 10^3 + 32 \cdot 10^3} = \frac{880}{148} = 5,94\%.$$

§ 2. Variația procentuală a unui produs de două mărimi variabile

Fie x_1 și x_2 două mărimi variabile independente una de alta și x produsul lor :

$$x = x_1 \cdot x_2. \quad (5)$$

Dacă notăm cu p, p_1, p_2 procente de variație ale lui x, x_1, x_2 , atunci :

$$x + \frac{p}{100} x = \left(x_1 + \frac{p_1}{100} x_1 \right) \cdot \left(x_2 + \frac{p_2}{100} x_2 \right). \quad (6)$$

Scăzînd pe (5) din (6) obținem :

$$p = p_1 + p_2 + \frac{p_1 \cdot p_2}{100}. \quad (7)$$

Formula (7) ne dă procentul p de variație al lui x , cînd x_1 și x_2 variază cu procente p_1 respectiv p_2 .

Exemplu. La un depou de locomotive, consumul specific de combustibil (c) s-a redus în cursul unei luni cu 12% față de plan, iar numărul de tone brute remorcate (T) a crescut cu 10%.

Care este procentul p de variație a cantității de combustibil C față de plan?

Se știe că între C , c și T există relația $C = c \cdot T$.

Cum procente de variație ale lui c și T sînt $p_1 = -12$; $p_2 = 10$, formula (7) ne dă:

$$p = -12 + 10 - \frac{10 \cdot 12}{100} = -3,2\%.$$

Deci, cantitatea de combustibil consumat la acel depou în luna respectivă s-a redus cu 3,2% față de plan și au fost necesare numai 3 operații.

O b s e r v a Ț i e. Dacă am rezolva problema calculînd mai întîi valoarea planificată și realizată a indicatorilor, ar fi fost necesare 11 operații elementare.

§ 3. Variația procentuală a unui produs de n mărimi variabile

Fie

$$x = x_1 \cdot x_2 \dots x_n, \quad (8)$$

produsul a n mărimi variabile independente una de alta.

Dacă notăm cu $p_1, p_2, \dots, p_n$ și p , procente de variație ale lui $x_1, x_2, \dots, x_n$ și x , vom putea scrie:

$$x + \frac{p}{100} x = \left(x_1 + \frac{p_1}{100} x_1 \right) \cdot \left(x_2 + \frac{p_2}{100} x_2 \right) \dots \left(x_n + \frac{p_n}{100} x_n \right). \quad (9)$$

Împărțind pe (9) la (8) și efectuînd calculele găsim:

$$p = \left[\left(1 + \frac{p_1}{100} \right) \left(1 + \frac{p_2}{100} \right) \dots \left(1 + \frac{p_n}{100} \right) - 1 \right] \cdot 100. \quad (10)$$

Sau, dacă notăm cu $c_i = (1 + p_i : 100)$; $i = 1, 2, \dots, n$, coeficienții de variație ale mărimilor $x_1, x_2, \dots, x_n$ și cu c coeficientul de variație al produsului x , atunci (10) devine

$$c = (c_1 \cdot c_2 \dots c_n - 1). \quad (10')$$

Formula (10) ne dă procentul, (iar (10') coeficientul) de variație a unui produs de n mărimi variabile în funcție de procente (respectiv coeficienții) de variație ale acestora.

Exemplu. Se știe că fondul de retribuii reprezintă suma tuturor fondurilor bănești care se cuvin lucrătorilor unei întreprinderi pentru munca depusă. Prin drepturi bănești se înțeleg sumele încasate de un lucrător sub diferite forme: retribuiția, acordul simplu sau acordul progresiv (dacă lucrează în acord), plata orelor suplimentare, premiile, indemnizațiile de vechime, sporul pentru munci efectuate în condiții speciale etc.

Fondul de retribuție depinde de următorii indicatori :

A_1 = costul unei ore-muncă, exprimat în lei/oră ;

A_2 = timpul necesar pentru efectuarea unui produs, măsurat în ore/bucată ;

A_3 = productivitatea muncii, exprimată în bucăți/om zi ;

A_4 = numărul de oameni zile efectuate în perioada de timp considerată ; de exemplu oameni-zile pe lună.

Se constată că, fondul de retribuție F care se exprimă în lei/lună este egal cu produsul celor 4 indicatori A_1, A_2, A_3, A_4 .

$$F\left(\frac{\text{lei}}{\text{lună}}\right) = A_1\left(\frac{\text{lei}}{\text{oră}}\right) \cdot A_2\left(\frac{\text{ore}}{\text{bucată}}\right) \cdot A_3\left(\frac{\text{bucăți}}{\text{om} \cdot \text{zi}}\right) \cdot A_4\left(\frac{\text{oameni} \cdot \text{zile}}{\text{lună}}\right)$$

deci :

$$F = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4.$$

Aplicație. La o întreprindere se constată că, cei 4 indicatori A_1, A_2, A_3, A_4 au variat în cursul unei luni față de plan cu procente :

$$p_1 = 10\% ; p_2 = -5\% ; p_3 = 15\% ; p_4 = 8\%.$$

Care este procentul de variație a fondului de retribuții față de plan, în cursul acelei luni ?

Deoarece fondul de retribuții este produsul a 4 factori, procentul de variație al acestui produs se va calcula cu formula (10), pentru $n = 4$:

$$\begin{aligned} p &= \left[\left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right) - 1 \right] \cdot 100 = \\ &= (1,10 \cdot 0,95 \cdot 1,15 \cdot 1,08 - 1) \cdot 100 = (1,298 - 1) \cdot 100 = \\ &= 0,298 \cdot 100 = 29,8\%. \end{aligned}$$

Fondul de retribuții a fost depășit cu 29,8% față de plan.

§ 4. Variația procentuală a unui cît de două mărimi variabile

Fie x_1, x_2 două mărimi variabile independente una de alta și x cîtul lor .

$$x = \frac{x_1}{x_2}. \quad (11)$$

Dacă notăm cu p_1, p_2, p procente de variație ale lui x_1, x_2 și x , vom putea scrie :

$$x + px : 100 = \frac{x_1 + p_1 x_1 : 100}{x_2 + p_2 x_2 : 100}. \quad (12)$$

Împărțind pe (12) la (11) și efectuînd calculele găsim :

$$p = \frac{100(p_1 - p_2)}{100 + p_2}. \quad (13)$$

Exemplu: Planul de cheltuieli la o întreprindere de confecții a fost în cursul unei luni de 90 000 lei pentru confecționarea a 450 rochii. La sfârșitul lunii s-a constatat că producția a fost depășită cu 20%, iar cheltuielile numai cu 8%.

Care este procentul de variație al prețului de cost?

Soluție. Cum prețul de cost c este raportul dintre totalul cheltuielilor C și producția P ,

$$c = C : P,$$

iar C și P au crescut cu 8%, respectiv 20%, procentul de variație p al cîtului va fi dat de formula (13), în care $p_1 = 8$ și $p_2 = 20$:

$$p = \frac{100(8 - 20)}{100 + 20} = \frac{-1200}{120} = -10\%.$$

Deci, prețul de cost a fost redus cu 10% față de plan.

Observații. Fără a folosi formula (13), problema se putea rezolva calculînd separat cheltuielile realizate C_R , prețul de cost planificat c_P , producția realizată P_R și apoi prețul de cost realizat c_R ; iar procentul de variație a prețului de cost față de plan va fi:

$$p = 100 \left(\frac{c_R}{c_P} - 1 \right) = -10\%.$$

Dar în acest caz, sînt necesare 12 operații elementare în loc de 4 cît necesită formula (13).

— Dacă numărătorul se menține constant și variază numai numitorul, adică $p_1 = 0$, procentul de variație al cîtului va fi:

$$p = - \frac{100p_2}{100 + p_2}. \quad (14)$$

§ 5. Variația procentuală a unui cît de produse a mai multor mărimi variabile

Fie:

$$z = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m}{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n} \quad (15)$$

cîtul dintre produsul $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m$ și $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n$; a $m + n$ mărimi variabile independente una de alta.

¹ Acest lucru este posibil prin creșterea productivității muncii și prin faptul că o parte din cheltuielile unei întreprinderi (de exemplu cheltuielile de regie) au un caracter constant față de plan; ele nu depind de variația producției.

Dacă notăm cu $p_1, p_2, \dots, p_m$, procentele de variație ale lui $x_1, x_2, \dots, x_m$ și cu $q_1, q_2, \dots, q_n$ procentele de variație ale lui $y_1, y_2, \dots, y_n$; procentul r de variație a lui z , va fi dat de formula:

$$r = \left[\frac{\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{p_m}{100}\right)}{\left(1 + \frac{q_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{q_2}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{q_n}{100}\right)} - 1 \right] \cdot 100. \quad (16)$$

Observații. Formula (16) conține următoarele cazuri particulare tratate anterior:

- pentru $m = 2, n = 0$, se obține formula (7);
- pentru $m = m, n = 0$, se obține formula (10);
- pentru $m = 1, n = 1$, se obține formula (13);
- pentru $m = 0, n = 1$, se obține formula (14).

Probleme propuse

1. La o întreprindere de confecții, prețul de cost planificat c_p a fost de 124 lei/bucată. Producția planificată a fost de 4 500 bucăți ($P_p = 4500$). Se știe că prețul de cost s-a realizat cu o reducere de 8% față de plan ($p_1 = -8$), iar producția s-a realizat cu o depășire de 15% ($p_2 = 15$).

Cu ce procent (p) a variat totalul cheltuielilor (C_p) la acea întreprindere?

R. Cum $C_p = c_p \cdot P_p$, se va aplica formula (7), se va găsi $p = 5,8\%$.

2. La un atelier de confecționat piese de schimb pentru tractoare s-a constatat la sfârșitul unei luni că, deși s-a lucrat cu 10% mai puțini muncitori față de cei prevăzuți în plan, producția s-a realizat conform planului, ca urmare a creșterii productivității muncii.

Cu cât a crescut productivitatea muncii la acea întreprindere?

R. Productivitatea muncii P_m este raportul dintre producția P și numărul N de oameni-zile¹ efectuate pentru realizarea acestei producții: $P_m = P : N$. Se va folosi formula (14); $p = 11,11\%$.

3. La o întreprindere s-a prevăzut ca în decurs de 6 ani productivitatea muncii să crească cu 60%. Să se determine procentul de creștere a numărului de muncitori de la acea întreprindere, pentru ca producția să fie depășită în decursul acestor 6 ani cu 70%.

R. Dacă notăm cu P producția, cu P_m — productivitatea muncii, iar cu N — numărul de muncitori, atunci $N = P : P_m$.

Dacă ținem seama de procentele de variație ale lui P și P_m , formula (13) ne va da $p = 6,25\%$.

4. Se cere procentul (p) de variație a cheltuielilor într-un sector industrial în care s-a prevăzut ca în decurs de 6 ani prețul de cost să fie redus cu 15%, iar producția să crească cu 70%.

¹ Numărul de oameni-zile se obține cu formula $N = \sum_{i=1}^k n_i \cdot z_i$, dacă în luna respectivă

(sau în perioada de timp analizată) au fost k zile lucrătoare, n_i reprezintă numărul de lucrători care au lucrat câte z_i zile. Exemplu: dacă 200 lucrători au lucrat câte 18 zile, iar 30 numai câte 8 zile $N = 200 \cdot 18 + 30 \cdot 8 = 3840$ oameni-zile.

R. Dacă notăm cu C , P și c cheltuielile, producția și prețul de cost, $C = P \cdot c$; se va găsi $p = 44,5\%$.

5. Să se calculeze procentul de variație a prețului de cost în decurs de 5 ani, știind că producția crește în această perioadă cu 70% iar cheltuielile cresc numai cu 19%.

R. Se va folosi formula (13). Se va găsi $p = -30\%$. Prețul de cost se va reduce cu 30% față de plan.

6. La 3 ateliere de zonă de pe cuprinsul unei regionale C.F.R. s-au planificat și s-au realizat următoarele reparații la vagoanele de marfă:

Denumirea atelierului	Vagoane planificate pentru reparat	Procentul de depășire față de plan
A_1	200	12
A_2	140	4
A_3	85	6

Se cere procentul de depășire a numărului de vagoane reparate la acea regională C.F.R. față de plan.

R. Folosind formula (4) pentru $n = 3$ se va găsi $p = 8,14\%$.

7. Cheltuielile necesare pentru consumul de energie electrică variază direct proporțional cu următorii indicatori:

c = prețul de cost al unui kilowatoră, exprimat în lei/kwh;

s = consumul specific de energie electrică, măsurat în kwh/mașini-oră;

n = numărul mediu al orelor de funcționare a unei mașini în perioada de timp analizată¹, exprimată în ore;

m = numărul total de mașini² care au funcționat în acea perioadă.

Cheltuielile necesare (C) pentru consumul de energie electrică, se vor putea exprima în funcție de acești 4 indicatori sub forma:

$$C(\text{lei}) = c \left(\frac{\text{lei}}{\text{kwh}} \right) \cdot s \left(\frac{\text{kwh}}{\text{mașini-oră}} \right) \cdot n \left(\frac{\text{mașini-oră}}{\text{mașini}} \right) \cdot m (\text{mașini}).$$

Deci:

$$C = c \cdot s \cdot n \cdot m.$$

Dacă procente de variație ale lui c , s , n , m au fost: 2%, -4%, 6%, 5%, se cere procentul de variație al cheltuielilor.

R. Formula (10) ne va da: $p = 9\%$.

¹ Mărimea acestui indicator se obține însumând numărul de ore de funcționare a tuturor mașinilor care au lucrat în perioada respectivă și împărțind rezultatul la numărul mașinilor $n = (\sum h_i m_i) : \sum m_i$, în care $h_1, h_2, \dots, h_n$ reprezintă numărul de ore lucrate de cele $m_1, m_2, \dots, m_n$ mașini.

² $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

8. Producția unei întreprinderi industriale depinde de următorii indicatori :

n = norma de manoperă, care reprezintă cantitatea de produse obținută în unitate de timp (bucăți/oră) ;

t = timpul mediu de lucru al unui muncitor pe zi (exprimat în ore/om · zi) ;

N = numărul mediu de muncitori care au lucrat pe zi în perioada analizată, exprimat în oameni-zile/zi = $\Sigma(N_k \cdot Z_k) : (\Sigma Z_k)$, unde N_k reprezintă numărul de muncitori care au lucrat câte Z_k zile ;

Z = numărul de zile lucrătoare din perioada considerată (de exemplu, într-o lună $Z = 26$ zile/lună, într-un an $Z = 300$ zile/an).

Să se exprime producția P (bucăți/lună) în funcție de acești 4 indicatori.

Știind că indicatorii n, t, N au variat față de plan cu procente $p_1 = 10\%$, $p_2 = 5\%$, $p_3 = -5\%$, iar Z a rămas constant, se cere procentul p de variație al producției față de plan.

R. $P = n \cdot t \cdot N \cdot Z$; se va găsi $p = 9,72\%$.

9. Producția în traficul de călători la căile ferate, C_k care se exprimă în călători-km¹ depinde de următorii indicatori, față de care variază direct proporțional :

c_1 = coeficientul de utilizare² al locurilor ; este egal cu raportul dintre numărul de călători și numărul de locuri (dacă $c_1 = 1$, toate locurile sînt ocupate, dacă $c_1 = 0$, toate locurile au fost libere² etc.) și se exprimă în călători/loc. În general $0 \leq c_1 \leq 1$;

c_2 = capacitatea vagonului, care reprezintă numărul mediu de locuri ce revin pe o osie a vagonului de călători și este raportul dintre numărul de locuri și numărul de osii ale vagonului (de exemplu, dacă un vagon pe 4 osii are 72 de locuri, $c_2 = 72 : 4 = 18$) și se exprimă în locuri/osie ;

c_3 = compunerea în osii a unui tren, este numărul mediu de osii din compunerea unui tren ; se obține ca raport dintre numărul de osii și numărul de trenuri și se exprimă în osii/tren ;

c_4 = distanța medie parcursă de un tren de călători în cursul perioadei analizate, se exprimă în km și se calculează cu formula $c_4 = (\Sigma t_i d_i) : \Sigma t_i$, în care t_i reprezintă numărul de trenuri ce au parcurs distanța d_i ;

c_5 = numărul de trenuri expediate, adică numărul de trenuri ce au circulat în perioada analizată $c_5 = \Sigma t_i$.

Să se exprime producția C_k (călători · km) în funcție de cei cinci indicatori $c_1, \dots, c_5$.

Știind că în cursul unei luni, acești indicatori au variat cu procente : $p_1 = 5\%$; $p_2 = 12\%$, $p_3 = 10\%$; $p_4 = -4\%$; $p_5 = 8\%$, se întreabă cu ce procent a variat producția în traficul de călători față de plan.

R. $C_k = c_1$ (călători/loc) · c_2 (locuri/osie) · c_3 (osii/tren) · c_4 (km) · c_5 (trenuri) = $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_4 \cdot c_5$ călători · km. Se va găsi $p = 34\%$.

¹ Mărima acestui indicator se obține cu formula $C_k = \Sigma N_i D_i$, în care N_i reprezintă numărul de călători care au parcurs distanța D_i .

² Dacă $c_1 = 2$; 50% din pasageri călătoresc pe locuri și 50% în picioare, $c_1 = 2$ reprezintă un coeficient de aglomerație maxim.

CAPITOLUL IV.

REPREZENTĂRI GRAFICE

Importanța reprezentărilor grafice este bine cunoscută. Prin grafic putem urmări evoluția unui fenomen în funcție de cauza care-l produce. În același timp, studiind dependența fenomenului în funcție de factorii de care depinde, vom putea lua măsuri pentru a provoca fenomene favorabile vieții sociale și a elimina acele cauze care provoacă fenomene neplăcute.

Pentru a ilustra cele spuse, vom da câteva exemple cu aspecte din viața economică.

1. *Variația prețului de cost în funcție de variația producției*

Realizarea planului de producție la orice întreprindere este condiționată de un consum de:

- forță de muncă necesară realizării produsului și care se reflectă în fondul de retribuție;

- materii prime și materiale care intră în produsul finit și transmit acestuia integral costul lor;

- combustibili și lubrifianți, energie electrică, apă, abur, aer comprimat, oxigen, acetilenă, precum și alte materii prime sau materiale auxiliare care se consumă direct sau indirect în timpul și din cauza procesului de producție, nu rămân în produsul obținut, dar transmit acestuia costul lor integral.

- mașini unelte, mașini de forță, de ridicat, de transportat, clădiri sau alte instalații fixe; în general, tot felul de utilaje care servesc în mod direct sau indirect la realizarea producției.

Acestea se consumă numai parțial în timpul unui ciclu de producție (adică în timpul realizării unității de produs) și transmit produsului numai o mică parte din valoarea lor.

Acea parte din valoarea mijloacelor fixe care se transferă produsului reprezintă uzura și intră în costul produsului prin cota de amortizare.

Totalul cheltuielilor necesare realizării planului de producție se compun din următoarele *elemente de cheltuieli*: fondul de retribuție (inclusiv accesoriile), materii prime și materiale, combustibil, energie electrică, apă, abur, aer comprimat, amortismentul și cheltuieli diverse.

La rândul lor, aceste cheltuieli se împart în:

- cheltuieli direct proporționale cu producția, cunoscute sub numele de *cheltuieli variabile* (C_v), care se compun din retribuție și materiale direct productive;

¹ Toate aceste utilaje poartă numele de mijloace fixe sau mijloace de bază.

— cheltuieli care se mențin constante cînd producția crește (sau scade), adică se mențin egale cu valoarea lor planificată.

Aceste cheltuieli, cunoscute sub numele de *cheltuieli convențional constante* (C_c), sau cheltuieli fixe, se compun în general din cheltuieli de regie: întreținerea și reparația clădirilor administrației, încălzirea, iluminarea și alimentarea lor cu apă, plata telefoanelor și rechizitelor de birou etc., plata retribuțiilor cadrelor administrative, de pază și de serviciu etc.

Prețul de cost reprezintă totalitatea muncii omenеști sub diferitele ei aspecte, care a fost depusă în trecut, (munca materializată) și aceea dezvoltată în prezent (munca vie) în diferite faze ale procesului de producție, consumată la o întreprindere pentru obținerea unei producții și se exprimă în lei pe unitate de produs.

Prețul de cost (c) va fi deci raportul dintre totalul cheltuielilor (C_t) și producție (P):

$$c = \frac{C_t}{P}; \quad (1)$$

— producția P se poate exprima în unități fizice caracteristice: m, m², m³, kg, t, kwh, bucăți etc. sau în unități convenționale;

— totalul cheltuielilor C_t necesare pentru realizarea producției este dat în lei;

— prețul de cost c se exprimă în lei/unitate de produs (lei/m, lei/kg, lei/bucată, lei/t etc.).

Cum cheltuielile totale se împart în mod natural în cheltuieli variabile (C_v) și convențional constante (C_c), vom putea scrie prețul de cost sub forma:

$$c = \frac{C_v + C_c}{P}. \quad (2)$$

Problema care se pune este de a determina procentul de variație ($v\%$) a prețului de cost (c) cînd producția (P) variază cu $x\%$.

Dacă producția variază cu $x\%$ devine:

$$P + \frac{x}{100} P = P \left(1 + \frac{x}{100} \right).$$

Cheltuielile constante rămîn egale cu C_c .

Cheltuielile variabile (C_v) variază cu același procent ca și producția de $x\%$ și devin:

$$C_v + \frac{x}{100} C_v = C_v \left(1 + \frac{x}{100} \right).$$

Prețul de cost variază cu procentul de $y\%$ și devine:

$$c + \frac{y}{100} c = c \left(1 + \frac{y}{100} \right).$$

Dacă ținem seama de relația (2), vom putea scrie :

$$c + \frac{y}{100} c = \frac{C_e + C_v \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{P \left(1 + \frac{x}{100}\right)} \quad (3)$$

Scăzînd pe (2) din (3) și efectuînd calculele, obținem :

$$y = - \frac{100ax}{100 + x}, \quad (4)$$

unde parametrul $a = C_e : C_v$ reprezintă greutatea specifică a cheltuielilor fixe față de totalul cheltuielilor. Cum $C_e > 0$ și în același timp $C_e < C_v$, rezultă că $a \in (0,1)$.

Observație: $C_e \neq 0$, deoarece nu pot exista întreprinderi care să aibă toate cheltuielile variabile; de asemenea $C_e < C_v$, deoarece nu pot exista întreprinderi la care toate cheltuielile să fie fixe.

Valoarea parametrului a este caracteristică fiecărei întreprinderi și depinde de natura ei. Astfel, în transportul feroviar $a \approx 0,6$; la departamentul minelor și petrolului $a \approx 0,4$ în industria alimentară $a \approx 0,16$ (cheltuielile fixe sînt foarte mici, reprezintă numai 16% din totalul cheltuielilor) etc.

Formula (4) este generală și este folosită la analiza prețului de cost la orice întreprindere.

Graficul funcției (4). Pentru a putea urmări modul de variație a prețului de cost în funcție de variația producției, vom reprezenta grafic funcția (4) pentru cazul concret în care $a = 0,5$:

$$y = - \frac{50x}{100 + x}. \quad (5)$$

Domeniul maxim de definiție al funcției (5) este mulțimea $x \in R - \{-100\}$. Dacă ținem însă seama de semnificația practică a lui x , se constată că x trebuie să fie mai mare decît -100 . Dacă $x = -100$, producția scade cu 100% și devine zero, ceea ce practic nu se întîmplă niciodată.

De asemenea, producția nu poate crește decît între anumite limite într-o perioadă dată (lunar, trimestrial sau anual).

Vom considera $x \leq 100$, adică producția poate fi depășită cel mult cu 100% față de plan.

În aceste condiții, procentul practic de variație a producției va fi cuprins între -100 și $+100$, $x \in (-100, 100]$.

Curba trece prin origine (pentru $x = 0$, $y = 0$) și admite asimptota $x = -100$. Prima derivată a funcției este :

$$y' = - \frac{5000}{(100 + x)^2} < 0,$$

deci funcția este strict descrescătoare pe domeniul ei practic de definiție.

Folosind datele din tabela de mai jos:

x	-100	-50	-25	0	25	50	100
y	$+\infty$	$\searrow$ 50	$\searrow$ 50/3	$\searrow$ 0	$\searrow$ -10	$\searrow$ -50/3	$\searrow$ -25
y'	$-\infty$	—	—	—	—	—	—

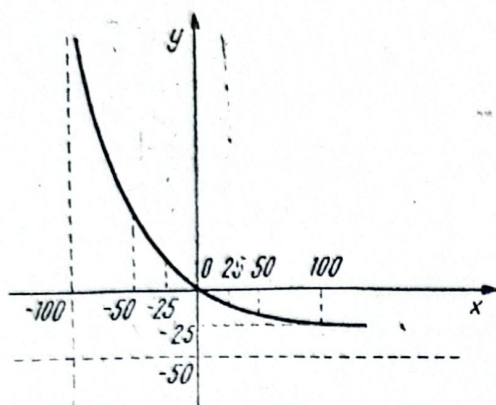


Fig. 28.

se obține graficul din figura 28.

Observații: — Dacă facem translația de axe $x = X - 100$, $y = Y - 100 \cdot a$ și notăm $10^4 a = K$, se obține hiperbola echilaterală $XY = K$.

— Variația procentuală a prețului de cost se face după o hiperbolă în funcție de procentul de variație a producției.

— Prețul de cost scade odată cu creșterea producției și crește odată cu nerealizarea planului de producție. Această scădere (respectiv creștere)

este cu atât mai pronunțată cu cât cheltuielile convențional constante reprezintă un procent cât mai mare din totalul cheltuielilor acelei întreprinderi, deci cu cât parametrul a are valori cât mai apropiate de 1.

Dacă acest grafic este întocmit la o scară convenabilă (de exemplu $0,1\% = 1 \text{ mm}$), atunci fiecărui procent de variație a producției $x = x_1\%$ îi va corespunde un procent de variație a prețului de cost $y = y_1\%$, care se va putea obține direct din grafic prin simpla măsurare a ordonatei punctului de abscisă $x = x_1$.

— Dacă producția variază cu procente egale în valoare absolută, dar de semne contrare ($x = \pm x_1$), atunci prețul de cost variază cu procente diferite.

Astfel, dacă producția crește cu 50% ($x_1 = 50$), prețul de cost scade cu $50/3\% = 16,66\%$ ($y_1 = -50/3$).

Dacă însă producția scade cu 50%, adică se realizează cu 50% sub plan ($x_1 = -50$), prețul de cost crește cu 50% ($y_1 = 50$), deci crește

de trei ori mai mult decât a scăzut în cazul depășirii planului de producție cu același procent de 50%.

— Funcția (4) reprezintă un fascicul de hiperbole, deoarece parametrul „ a ” poate lua o infinitate de valori cuprinse între 0 și 1.

Cum pentru $a = 0$, avem $y = 0$ (axa Ox), iar pentru $a = 1$,

$$y = -100x : (100 + x), \quad (6)$$

fasciculul de hiperbole va fi cuprins între axa Ox și hiperbola (6). În figura 29 se pot vedea câteva hi-

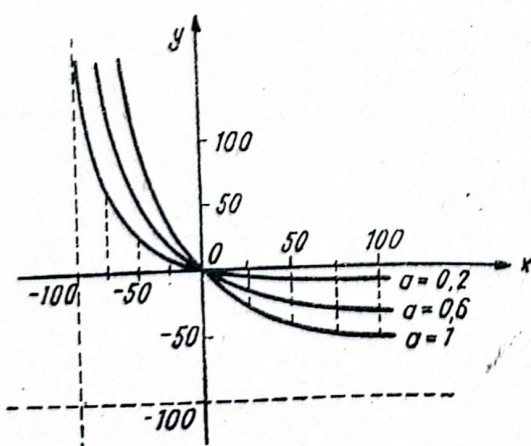


Fig. 29.

perbole care fac parte din acest fascicul, corespunzătoare lui $a = 0$; 0,2; 0,6; 1.

2. Variația procentuală la productivitatea muncii.

Productivitatea muncii Q reprezintă valoarea raportului dintre producția P și timpul total T , folosit pentru a obține acea producție:

$$Q = \frac{P}{T} \quad (7)$$

Productivitatea muncii se exprimă în unități de producție pe unitate de timp (bucăți/om-ză; m^2 /om-oră; tone/om-ză etc.).

Lucrătorii se împart în două categorii: direct productivi N_d , al căror număr variază direct proporțional cu producția, și auxiliari N_a , al căror număr se menține constant când producția variază¹. Deci: $T = T_d + T_a$, și formula (7) devine:

$$Q = \frac{P}{T_d + T_a} \quad (8)$$

Problema care se pune este de a determina variația procentuală ($y\%$) a productivității muncii, când producția variază cu $x\%$ față de plan.

Dacă producția variază cu $x\%$ față de plan, ea devine:

$$P + \frac{x}{100} P \quad (9)$$

Deoarece se presupune că numărul lucrătorilor direct productivi variază cu același procent ca și producția, T_d devine:

$$T_d + \frac{x}{100} T_d \quad (10)$$

Numărul lucrătorilor auxiliari se menține egal cu valoarea lui planificată T_a .

În aceste condiții, productivitatea muncii variază cu un procent $y\%$ și devine:

$$Q + \frac{y}{100} Q \quad (11)$$

Ținând seama de (9), (10) și (11) relația (8) se scrie:

$$Q + \frac{y}{100} Q = \frac{P + \frac{x}{100} P}{T_d + T_d + \frac{x}{100} T_d} \quad (12)$$

¹ Dacă notăm cu $n_1, n_2, \dots, n_k$ numărul de oameni care au lucrat câte $z_1, z_2, \dots, z_k$ zile, atunci $T_d = n_1 z_1 + n_2 z_2 + \dots + n_k z_k = \sum n_i z_i$ om-zl.

² T_d și T_a reprezintă timpul de muncă efectuat de cele două categorii de lucrători N_d și N_a și se exprimă în oameni-zile.

Scăzînd pe (8) din (12) și efectuînd calculele se deduce :

$$y = \frac{100x(1-b)}{100+bx}, \quad (13)$$

în care $b = T_v : T_t$ reprezintă raportul dintre timpul de muncă efectuat de muncitorii direct productivi și timpul total de muncă.

Valoarea acestui parametru depinde de natura întreprinderii : industrială sau de construcții, agricolă sau de transporturi etc. În transportul feroviar de exemplu, $b=0,1-0,2$; în industria alimentară, $b=0,4-0,5$; la departamentul minelor, $b=0,5-0,6$; ș.a.m.d. Parametrul b este caracteristic fiecărei întreprinderi. Cum $T_v \neq 0$ și $T_v \neq T_t$, $b \neq 0$; $b \neq 1$. În general $0 < b < 1$.

Formula (13) ne permite să calculăm variația procentuală a productivității muncii în funcție de procentul de variație a producției față de plan pe o anumită perioadă de timp.

Graficul funcției (13). Vom întocmi graficul funcției (13) pentru $b = 0,6$;

$$y = \frac{200x}{500+3x}. \quad (14)$$

Graficul acestei funcții este o hiperbolă, ale cărei asimptote sînt : $x = -500 : 3$, paralelă cu axa Oy ;

$y = 200 : 3$, paralelă cu axa Ox .

Cum $y' = 10^5 : (500+3x)^2 > 0$, curba va fi strict crescătoare pe domeniul ei practic de definiție : $x \in [-100, +100]$.

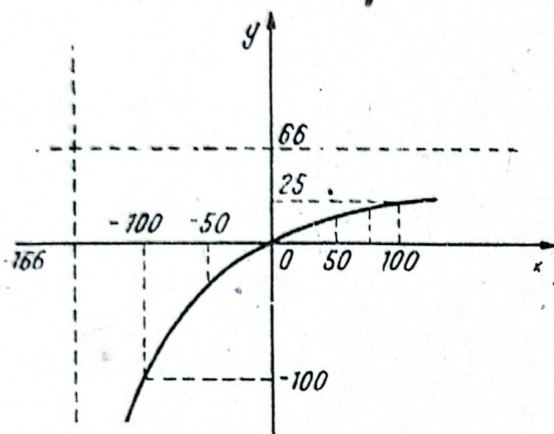


Fig. 30.

Folosind tabela de mai jos, am construit (fig. 30) graficul funcției (14).

x	-100	-50	-25	0	25	50	100
y	-100	$\nearrow -200/7$	$\nearrow -11,8$	$\nearrow 0$	$\nearrow 8,7$	$\nearrow 200/13$	$\nearrow 25$
y'	+	+	+	+	+	+	+

Observații. Productivitatea muncii crește odată cu producția și scade odată cu ea.

Se constată o scădere mai accentuată decât creșterea în cazul cînd producția a fost depășită (sau nerealizată) cu același procent.

Dacă parametrul b tinde către zero curba tinde să se confunde cu prima bisectoare :

$$y = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{100x(1-b)}{100+bx} = x.$$

Evident că în acest caz productivitatea muncii va crește cu același procent ca și producția.

Dacă b tinde către 1, hiperbola devine foarte aplatisată și tinde să se confunde cu axa Ox .

În consecință, fasciculul de hiperbole reprezentat de ecuația (13) va fi cuprins între axa Ox și prima bisectoare.

3. *Legea de variație a numărului de cumpărători ai unei mărfi în funcție de timp.*

Fie N numărul total al populației care ar putea fi aprovizionată cu un articol oarecare de larg consum (de exemplu cu o mașină electrică de spălat rufe).

Dacă notăm cu $x = x(t)$ numărul de cumpărători care au cumpărat această marfă la momentul t , atunci ritmul de cumpărare a mărfii este cu atât mai mare cu cât sînt mai mulți cumpărători și scade odată cu micșorarea numărului acelor care mai au nevoie de acea marfă.

Deci, viteza de variație a lui $x(t)$, adică $\frac{dx}{dt}$, este proporțională cu numărul populației rămasă fără marfă, adică cu $N - x$.

În aceste condiții vom putea scrie:

$$\frac{dx}{dt} = k(N - x), \quad (15)$$

k fiind o constantă de proporționalitate care ne arată care este numărul mediu de cumpărători în unitate de timp.

Ecuația (15) se poate scrie sub forma:

$$\frac{dx}{N - x} = k dt. \quad (16)$$

Dacă integrăm în ambii membri și ținem seama de condiția inițială, că la momentul $t = 0$, $x = 0$, obținem:

$$\ln(N - x) - \ln N = -kt; \quad N - x = N \cdot e^{-kt}; \quad x = N(1 - e^{-kt}) \quad (17)$$

Funcția (17) exprimă numărul de cumpărători în funcție de timp. Pentru a ne da seama de modul de variație a lui x în funcție de t , am construit graficul acestei funcții, luînd pe t în abscisă și pe x în ordonată, iar $k = 0,7$ (fig. 31).

Cum derivata funcției $x = N(1 - e^{-0,7t})$ este $x' = 0,7 N e^{-0,7t}$, tangenta în origine va fi $\operatorname{tg} \alpha = x'(0) = 0,7 N$.

La momentul $t = 1$, se va obține $x = N(1 - e^{-0,7}) \approx \frac{N}{2}$, pentru $t = 10$, $x \approx N$; $x'(10) \approx 0$. În practică, valoarea lui k se poate stabili în mod corect pe baze statistice și graficul funcției (17) se poate construi în mod real pe baza datelor concrete puse la dispoziție de statistica sectorului industrial respectiv.

t	0	1	10
x	0	$N/2$	N
x'	$0,7 N$	$0,35$	0

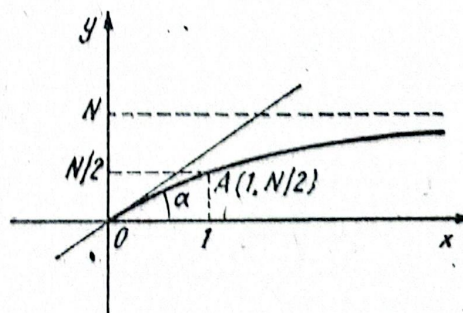


Fig. 31.

4. Variația cheltuielilor de stocare la o întreprindere, în funcție de volumul stocului.

Orice întreprindere industrială consumă într-o perioadă de timp T (de exemplu, un an) o cantitate P bine determinată (cunoscută din plan) de materie primă (sau piese de schimb etc.).

Pentru ca procesul de producție să se desfășoare fără nici o întrerupere, o anumită cantitate x din această materie trebuie să fie disponibilă în stocul acelei întreprinderi.

Dacă aprovizionarea se face zilnic, atunci $x = P : 300$ (am presupus că anul are 300 zile lucrătoare, iar dacă aprovizionarea se face o singură dată pentru întregul an, atunci $x = P$).

În general, aprovizionarea cu materie primă se face de n ori în perioada T și deci $x = P : n$, iar intervalele de timp t la care are loc aprovizionarea vor fi: $t = T : n$.

Cheltuielile de stocare se împart în două categorii:

a. Cheltuieli de manipulare și îngrijirea materialelor aflate în stoc, deci legate de cantitatea acestor materiale și pe care le notăm cu c_1 .

Presupunem că, consumul de materiale aflate în stoc se face în mod uniform, stocul mediu existent în depozit în perioada t va fi $x : 2$, deoarece pînă la sfîrșitul intervalului întreaga cantitate x va fi consumată (stocul mediu = $(x + 0) : 2 = x : 2$).

b. Cheltuieli efectuate o singură dată la intrarea unei cantități x . Aceste cheltuieli legate de operațiile de înmagazinare pe care le notăm cu c_2 au loc de n ori (adică de fiecare dată cînd se face aprovizionarea, indiferent de cantitatea de materiale x care intră în stoc).

Cheltuielile de stocare într-o perioadă t vor fi:

$$\frac{x}{2} \cdot c_1 \cdot t + c_2.$$

Totalul y al cheltuielilor de stocare în cele n perioade vor fi de n ori mai mari:

$$y = n \left(\frac{x}{2} c_1 t + c_2 \right). \quad (18)$$

Cum din $x = P : n$, se deduce $n = P : x$, relația (18) devine:

$$y = \frac{P}{x} \left(\frac{x}{2} c_1 t + c_2 \right).$$

Înlocuind pe t cu valoarea lui din $t = T : n$, în care $n = P : x$, ($t = T x : P$):

$$y = \frac{P}{x} \left(\frac{x}{2} c_1 \cdot \frac{T x}{P} + c_2 \right), \quad (19)$$

* Este vorba de cheltuielile care variază cu n , t și x , nu și de acele de transport sau acele de cumpărare, a căror sumă este constantă, deoarece nu depind de numărul n al tranșelor în care se face aprovizionarea.

sau sub forma:

$$y = \frac{Ax^2 + B}{x}, \quad (20)$$

unde $A = Tc_1 : 2$ și $B = P \cdot c_2$.

Graficul funcției (20). Domeniul de definiție în cazul unui studiu concret este $x \in (0, P]$, intervalul fiind închis la dreapta, deoarece putem avea $x = P$, în cazul cînd aprovizionarea se face o singură dată în perioada T , cu întreaga cantitate P .

Cum $y' = (Ax^2 - B) : x^2$, se anulează pentru $x = \sqrt{B : A} = \sqrt{2Pc_2 : Tc_1}$, curba va avea în punctul $M(x_0, y_0)$ un minim, deoarece $y'' = 2Pc_2 : x^3 > 0$ pentru orice $x \in (0, P]$.

Curba admite asimptota oblică $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax^2 + B}{x^2} = A = Tc_1 : 2;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [y(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{Ax^2 + B}{x} - Ax \right) = 0.$$

Asimptota oblică este dreapta

$$y = Ax; \quad y = \frac{Tc_1}{2} x.$$

Folosind tabela de mai jos, s-a întocmit graficul din figura 32.

x	0			x_0	P		
y	$+\infty$	$\searrow$		y_0	$\nearrow$	$y(P)$	
y'	—	—	—	0	+	+	+
y''	+	+	+	+	+	+	+

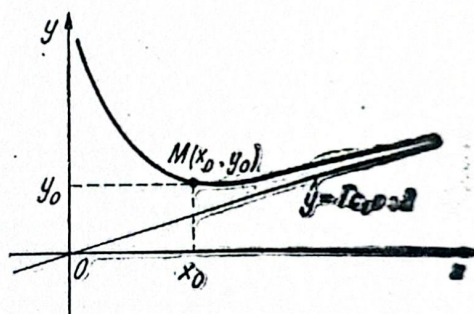


Fig. 32.

Minimul are loc în punctul M de coordonate:

$$x_0 = \sqrt{2Pc_2 : Tc_1}; \quad y_0 = \sqrt{2c_1c_2PT}. \quad (21)$$

Intervalul optim de timp, în care va trebuie să se facă aprovizionarea cu materie primă, pentru care cheltuielile de stocare sînt minime va fi:

$$t_0 = \frac{T}{P} x_0 = \frac{T}{P} \cdot \sqrt{\frac{2Pc_2}{Tc_1}} = \sqrt{\frac{2Tc_2}{Pc_1}}. \quad (22)$$

În cazul unui studiu concret, valorile lui T , P , c_1 și c_2 fiind cunoscute, formulele (21) și (22) ne vor da mărimea stocului (x_0), precum și perioada de aprovizionare (t_0) astfel încît cheltuielile de stocare să fie minime și egale cu y_0 .

Aplicație. Pentru $T = 360$ zile, $c_1 = 1000$ lei, $c_2 = 10\,000$ lei, $P = 72$ vagoane; se va găsi: $t_0 = 10$ zile, $x_0 = 2$ vagoane, $y_0 = 720\,000$ lei.

Dacă aprovizionarea cu materie primă se va face la intervale de 10 zile cu cîte 2 vagoane, cheltuielile de stocare vor fi minime și egale cu 720 000 lei/an.

Observație. Graficul funcției (20) admite o asimptotă oblică. În general, funcțiile raționale sau iraționale de forma:

$$f(x) = \sqrt[p]{\frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + l}{a'x^{n-p} + b'x^{n-p-1} + \dots + l'}}, \quad (23)$$

admit asimptote oblice de forma $y = \alpha x + \beta$.

Dacă $p = 2k$; $aa' > 0$. Dacă $p = 2k + 1$; $aa' \neq 0$; $1 \leq p < n$.
Deoarece α și β se obțin calculând limitele:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad \beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \alpha x], \quad (24)$$

care necesită calcule laborioase (mai ales când p și n sînt mari), dăm mai jos un *algoritm*¹ care permite găsirea asimptotelor oblice direct, folosind o formulă simplă, care comportă un număr minim de calcule.

Din (23) se obține:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[p]{\frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + l}{a'x^{n-p} + b'x^{n-p-1} + \dots + l'}}.$$

$$\text{Dacă } p = 2k; aa' > 0; \alpha = \pm \sqrt[p]{\frac{a}{a'}};$$

$$\text{dacă } p = 2k + 1; aa' \neq 0; \alpha = \sqrt[p]{\frac{a}{a'}}.$$

$$\begin{aligned} \beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \alpha x] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt[p]{\frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + l}{a'x^{n-p} + b'x^{n-p-1} + \dots + l'}} - \right. \\ &\left. - \sqrt[p]{\frac{a}{a'}} \cdot x \right] = \frac{a'b - ab'}{p \cdot a'^2 \cdot \sqrt[p]{\left(\frac{a}{a'}\right)^{p-1}}} = \frac{a'b - ab'}{paa' \cdot \sqrt[p]{\frac{a}{a'}}} = \frac{a'b - ab'}{paa'} \cdot \sqrt[p]{\frac{a}{a'}}. \end{aligned}$$

Graficul funcției (23) va avea două asimptote oblice:

$$y = \pm \sqrt[p]{\frac{a}{a'}} \left(x - \frac{ab' - a'b}{paa'} \right), \text{ dacă } p = 2k; aa' > 0, \quad (25)$$

și una singură:

$$x = \sqrt[p]{\frac{a}{a'}} x - \frac{ab' - a'b}{paa'}, \text{ dacă } p = 2k + 1; aa' \neq 0, \quad (26)$$

¹ Denumirea provine de la numele matematicianului arab Al-Horezmi, Muhamed ibn Musa (780-850).

Prin *algoritm* se înțelege orice succesiune de operații matematice care se execută pe baza unor reguli precis determinate, se desfășoară în timp într-o anumită ordine și conduce în final, după un număr finit de pași (etape, trepte) la rezolvarea unei probleme.

Exemple: algoritmul lui Euclid care ne permite să găsim c.m.m.d.c.a două numere întregi sau a două polinoame. Formula pentru rezolvarea ecuației de gradul doi sau de gradul 3 (formula lui Cardan) etc.

Cazuri particulare

1°. $p = 1$. Se obțin funcțiile raționale:

$$f(x) = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + l}{a'x^{n-1} + b'x^{n-2} + \dots + l'}; \quad aa' \neq 0$$

cu asimptota oblică:

$$y = \frac{a}{a'}x - \frac{\Delta}{a'^2}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b. \quad (27)$$

Exemple: Asimptotele oblice ale funcțiilor raționale:

$$f_1 = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x - 3}; \quad f_2 = \frac{x^4 + 6x^3 - 8}{2x^3 - 4x^2 + 2}; \quad f_3 = \frac{8x^5 + 2x^4 + 6x - 9}{16x^4 + 4x^3 + x + 1}$$

$$y = 2x - 5; \quad y = \frac{1}{2}x + 4; \quad y = \frac{1}{2}x.$$

2°. $p = 2$. Se obțin funcțiile iraționale:

$$f(x) = \sqrt{\frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + l}{a'x^{n-2} + b'x^{n-3} + \dots + l'}}; \quad aa' > 0; \quad n > 2;$$

cu asimptotele oblice:

$$y = \pm \sqrt{\frac{a}{a'}} \left(x - \frac{\Delta}{2aa'} \right); \quad aa' > 0$$

Dacă $n = 2$, se obțin funcțiile iraționale:

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}; \quad a > 0$$

care au două asimptote oblice:

$$y = \pm \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right); \quad a > 0.$$

Exemple:

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 3x^2 - 5}{x + 4}}; \quad f_2 = \sqrt{\frac{x^5 + 4x^4 + 2x - 2}{2x^3 + 8x^2 - 6}};$$

$$y = \pm \left(x - \frac{1}{2} \right); \quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x;$$

$$f_3 = \sqrt{4x^2 - 16x + 7}$$

$$y = \pm 2(x - 2).$$

3°. $p = 3$. Se obțin funcțiile iraționale:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + l}{a'x^{n-3} + b'x^{n-4} + \dots + l'}}; \quad aa' \neq 0, \quad n > 3,$$

cu asimptota oblică :

$$y = \sqrt[3]{\frac{a}{a'}} \left(x - \frac{\Delta}{3aa'} \right); \quad a \cdot a' \neq 0.$$

Dacă $n = 3$, se obțin funcțiile iraționale :

$$f(x) = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d}; \quad a \neq 0,$$

avînd asimptota oblică :

$$y = \sqrt[3]{a} \left(x + \frac{b}{3a} \right); \quad a \neq 0.$$

Exemple :

$$f_1 = \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^2 - 5}{x - 1}}; \quad f_2 = \sqrt[3]{\frac{8x^3 - 4x^2 + 5x - 9}{x^3 + 2x - 7}}; \quad f_3 = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + x},$$

$$y = x + \frac{2}{3};$$

$$y = 2x;$$

$$y = x + 1.$$

— Ecuațiile asimptotelor oblice ale funcțiilor iraționale (23), depînd numai de indicii p al radicalului, și de elementele matricei :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \text{ a cărui determinant } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b,$$

apare la numărătorul termenului liber ; nu și de gradul polinoamelor de sub radical.

— Algoritmul¹ obținut în (25), (26) și (27) este simplu și necesită 3...7 operații elementare.

— Acest algoritm a fost programat pe calculatoarele electronice și folosit pentru reprezentarea grafică a funcțiilor raționale și iraționale care admit asimptote oblice.

— Ecuațiile asimptotelor oblice se obțin ușor și manual fără riscul de a greși la calcule în cîteva secunde, eliminînd astfel munca obositoare pentru calculul limitelor (24).

— Dacă funcțiile iraționale au indicii impar ($p = 2k + 1$), nu mai este necesar să calculăm limitele pentru $x \rightarrow +\infty$ și $x \rightarrow -\infty$, deoarece aceste două limite coincid (formula 26).

— Dacă indicii funcției iraționale este par ($p = 2k$), se obțin pentru α și β două valori egale și de semne contrarii, iar funcția admite două asimptote distincte și simetrice față de axa Ox (date de formulele (25)).

— Pentru cei ce doresc să calculeze pe α și β folosind limitele (24), algoritmul constituie cel mai simplu mijloc de verificare.

5. Legea normală fundamentală

În calculul probabilităților, una din repartițiile mai des întîlnite în practică este „repartiția normală”.

¹ Δ fost prezentat de conf. univ. C. Miha în sesiunea de comunicări științifice a Academiei militare din 18-19 noiembrie 1980.

O variabilă aleatoare¹ continuă urmează o lege normală de repartiție, dacă funcția de probabilitate a valorilor posibile $x \in (-\infty, +\infty)$ este de forma :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (28)$$

în care : $e \approx 2,71828$; $\pi \approx 3,14159$; a = valoarea medie a variabilei aleatoare și σ^2 = dispersia acelei variabile².

Pentru $a = 0$ și $\sigma = 1$, se obține funcția :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (29)$$

care reprezintă densitatea de probabilitate a repartiției normale standard.

Graficul funcției de probabilitate.

Pentru a construi graficul funcției de probabilitate vom considera funcția :

$$f(x) = e^{-x^2},$$

care este de aceeași formă cu (28)

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0 \rightarrow x = 0 ; f(0) = 1 ;$$

$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2) = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} ; f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Folosind datele din tabela :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow 1 \searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	0
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f''(x)$	+	0	+	0	+

rezultă graficul din figura 33.

¹ Întîmplătoare. În latină alea înseamnă zar.

² Reprezintă media aritmetică a pătratelor abaterilor,

$$\sigma^2 = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] : n ; \text{ iar } \bar{x} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) : n = \text{media aritmetică.}$$

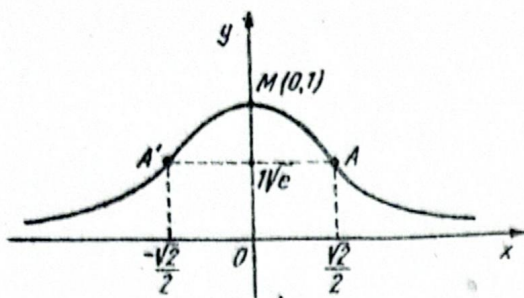


Fig. 33.

Observații: — Curba de repartiție normală este o curbă în clopot, care poartă numele de „clopotul lui Gauss”.

— Toate curbele de repartiție normală (28) au un punct de maxim (situat pe axa Oy , sau într-un punct oarecare $x_0 = a$; $y_0 = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$).

— Toate curbele sînt simetrice față de o dreaptă verticală dusă prin punctul de maxim, numită axă de simetrie. Această dreaptă se confundă cu axa Oy (dacă $a = 0$) sau este paralelă cu ea (dacă $a \neq 0$).

Din această proprietate rezultă că valorile egal depărtate de valoarea cea mai probabilă, au probabilități egale:

$$f(-x) = f(x); \quad x \in [0, \infty].$$

— În apropierea punctului de maxim, curbele sînt concave ($f''(0) < 0$); iar la o anumită distanță de el, devin convexe, ($f''(x) > 0$, pentru $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Punctele $A \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$ $A' \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$ sînt puncte de inflexiune (fig. 33).

Pentru fiecare curbă de repartiție normală se poate arăta că întreaga arie situată între graficul curbei și axa Ox este egală cu unitatea. Aceasta înseamnă că, probabilitatea ca variabila aleatoare să ia o valoare oarecare din mulțimea valorilor posibile este egală cu certitudinea.

6. Lănțișorul este o curbă plană, care reprezintă poziția de echilibru a unui fir greu și omogen, flexibil dar inextensibil supus gravitației, ale cărui capete sînt fixate în două puncte. Problema a fost pusă de Galileo Galilei (1638), ecuația ei a fost dată în 1691, de Johann Bernoulli, Gottfried Leibniz și Christian Huygens.

Ecuația acestei curbe este: ;

$$f(x) = a \cdot \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \quad (30)$$

Cum

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = 0 \rightarrow x = 0; \quad f(0) = a,$$

curba admite un extrem în $x = 0$.

Se constată apoi că $f(-x) = f(x)$ și deci curba este simetrică față de axa Oy .

Folosind datele din tabela:

x	$-\infty$	$-a$	0	a	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$1,5a$	a	$1,5a$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

se obține graficul din figura 34.

Lănțișorul este folosit în studiul podurilor suspendate pe doi piloni, în amplasarea conductelor electrice sau telefonice între doi stâlpi ș.a.

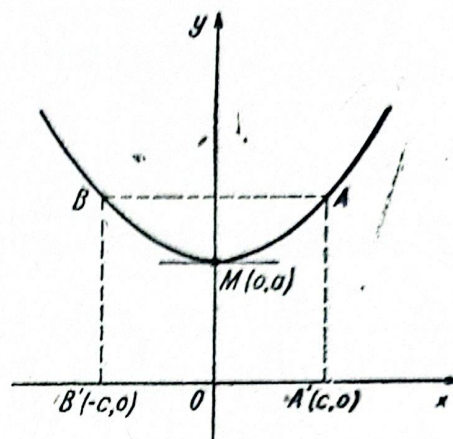


Fig. 34.

Probleme propuse

Se cere graficul următoarelor relații:

1. Strofoida

$$x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0; \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

R. Se va construi numai ramura:

$$y = x \sqrt{(a+x):(a-x)},$$

definită pe intervalul $x \in [-a, +a]$, care admite un minim în $x = a(1 - \sqrt{5}):2$ și asimptota $x = a$.

În greacă: stropheion = odgon; eidos = aspect. A fost studiată de Torricelli (1645) ca loc geometric. Denumirea i-a fost dată de E. Montucci (1846).

2. Cisoida lui Diocles:

$$y^2(2a - x) = x^3; \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

R. Se va construi numai ramura pozitivă:

$$y = x \sqrt{x:(2a - x)},$$

definită pe $x \in [0, 2a)$. Ramura negativă este simetrică față de axa Ox .

În greacă: kisos = iederă. A fost descoperită de Diocles (sec. 2 î.e.n.), care a folosit-o la rezolvarea problemei „dublării cubului” (găsirea unui segment $x = a \cdot \sqrt[3]{2}$).

3. Versiera:

$$y(x^2 + a^2) = a^3.$$

R. Este o curbă simetrică față de axa Ox , având un maxim în $M(0, a)$ și axa Ox ca asimptotă.

Fermat (1601–1665) a arătat că aria S mărginită de curbă și axa Ox este egală cu aria cercului de rază a ($S = \pi a^2$).

4. Astroida:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}; \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

R. Sub formă explicită:

$$y = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^{3/2}.$$

Are patru puncte de întoarcere $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$; $B(0, a)$; $B'(0, -a)$. A fost studiată de G. Leibniz în (1715 fig. 75).

5. Tractricea (sau tractoare):

Explicitată în funcție de y este:

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}; \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

R. Are proprietatea: segmentul de tangentă, cuprins între punctul de tangență și axa Ox este constant și egal cu a ($||MT|| = ||OA|| = a$). Virful $A(0, a)$ este punct de întoarcere (fig. 35).

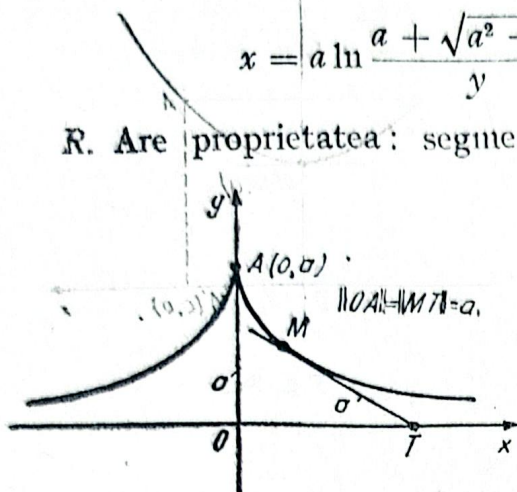


Fig. 35.

Axa Ox este asimptotă. Apariția ei este legată de considerații mecanice. A fost descoperită de G. Leibniz (1693), studiată de Chr. Huygens și de A. J. Fresnel, care a dat și unele dispozitive mecanice pentru trasarea acestei curbe.

Prin rotația ei în jurul axei Ox se obține corpul numit PSEUDOSFERĂ, pe care se realizează geometria Lobacevski-Bolyai.

6. Lemniscata lui Bernoulli, a cărei ecuația sub forma implicită este:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

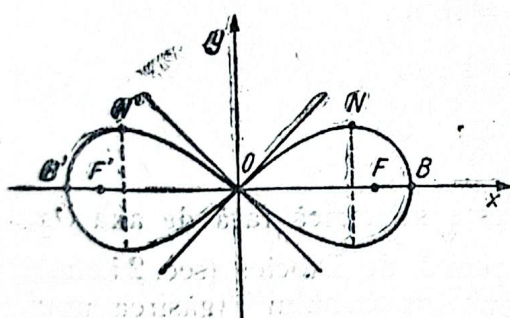


Fig. 36.

R. A fost obținută de Jacques Bernoulli (1694), ca o soluție a unei probleme de mecanică.

Se poate defini ca locul geometric al punctelor M pentru care produsul distanțelor la două puncte fixe

$$F(a, 0); \quad F'(-a, 0)$$

este constantă și egală cu a^2 .

$$(||MF|| \cdot ||MF'|| = a^2).$$

Taie axa Ox în punctele $B(a\sqrt{2}, 0)$; $B'(-a\sqrt{2}, 0)$, originea fiind un punct dublu. Are două puncte de maxim și două puncte de minim $N(a\sqrt{3}/2, a/2)$; $N'(-a\sqrt{3}/2, a/2)$ și simetricile lor față de axa Ox (fig. 36).

CAPITOLUL V

PROBLEME DE MAXIM ȘI DE MINIM

În acest capitol vom rezolva câteva probleme de maxim și minim folosind analiza matematică (cu ajutorul derivatelor).

A realiza cu un efort minim un efect maxim este un principiu care stă la baza tuturor acțiunilor noastre.

Acest principiu cunoscut sub numele de „principiul minimei acțiuni” (sau principiul lui Maupertuis) este urmat de altfel și de multe fenomene din natură.

— Lumina se propagă de la un punct la altul în linie dreaptă; ea își alege astfel drumul cel mai scurt.

— Dacă o rază de lumină se reflectă într-o oglindă, unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie și deci suma distanțelor de la sursa luminoasă reflectată în oglindă până la ochi este de asemenea minimă.

— Dacă o rază de lumină trece prin două medii diferite, de exemplu prin aer și prin apă, prin care viteza de propagare este diferită, v_1 și v_2 , atunci drumul parcurs prin cele două medii este astfel ales încât timpul total parcurs de acea rază să fie minim.

Acest adevăr, cunoscut sub numele de „legea refracției” descoperită de Snellius (1620) este concretizat în formula:

$$\sin \alpha : \sin \beta = v_1 : v_2,$$

în care α și β sînt unghiul de incidență, respectiv unghiul de refracție, iar v_1 și v_2 reprezintă viteza luminii în cele două medii diferite, în aer și apă.

— În lumea animală, acest lucru se aplică în mod instinctiv. De exemplu, s-a observat că fagurii făcuți de albine au o formă invariabilă și anume prisme hexagonale, terminate la fund cu un poliedru mărginit de romburi. Solidul astfel construit închide volumul maxim înconjurat de o suprafață minimă. Albinele realizează astfel o capacitate maximă pentru miere cu minimum de ceară.

Maraldi a măsurat cu atenție unghiurile fețelor rombice și le-a găsit $\alpha = 70^\circ 32'$; $\beta = 109^\circ 28'$ (în fig. 37 se poate vedea o celulă desfășurată și cele 3 romburi care închid fundul).

Réaumur entuziasmat de „cunoștințele de geometrie ale albinelor” s-a adresat matema-

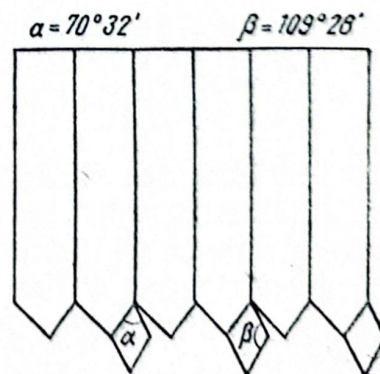


Fig. 37.

ticianului König din Berna pentru a rezolva problema fără a-i spune care este originea ei.

König a tratat această problemă folosind analiza matematică și a publicat rezultatul în 1739, găsind $\alpha = 70^\circ 34'$ și $\beta = 109^\circ 26'$.

S-a găsit astfel o coincidență uimitoare între calculele matematice și practica de mii de ani a albinelor.

Matematicianul englez Mac-Laurin nu a admis această diferență de $2'$ la unghiuri. În anul 1743 reface calculele și obține unghiurile măsurate de Maraldi. S-a constatat ulterior că nici König nu greșise calculele dar tabelele de logaritmi folosite de el aveau erori. În acest mod „albinele au reușit să corecteze tabele de logaritmi” alcătuite de calculatori experimentați.

Problemele de maxim și minim prezintă un interes deosebit în activitatea practică, în construcții sau în transporturi, în industrie sau în agricultură etc.

Unele probleme de maxim și minim conduc prin rezolvarea lor la economii de materii prime sau materiale, altele ne dau timpul minim pentru executarea unei lucrări.

În cele ce urmează vom da câteva exemple, rezolvate cu ajutorul analizei matematice, punând în evidență și economiile ce se pot realiza.

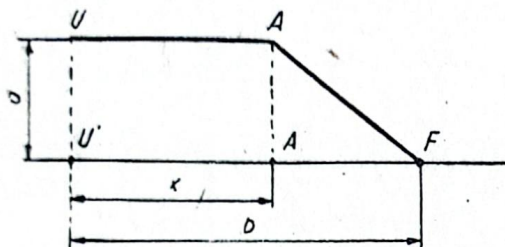


Fig. 38.

1. O uzină electrică U se află pe marginea unui râu de lățimea a km. Pe marginea opusă acestui râu se află o fabrică F la distanța de b km de proiecția U' a punctului A unde se află uzina electrică (fig. 38).

Se întreabă cum este mai economic să se instaleze un cablu care leagă

uzina cu fabrica, știind că pe mal, costul instalației cablului este de m lei/km, iar prin apă n lei/km (se presupune $n > m$).

Soluție. Dacă notăm $\|UA\| = x$ lungimea cablului pe pământ, de la U la A , atunci funcția al cărei minim se caută va fi:

$$C(x) = m \cdot \|UA\| + n \cdot \|AF\| = [mx + n\sqrt{a^2 + (b-x)^2}].$$

Anulând prima derivată obținem:

$$C'(x) = m - \frac{n(b-x)}{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} = 0; \quad x_0 = b - \frac{ma}{\sqrt{n^2 - m^2}}; \quad AF = \frac{na}{\sqrt{n^2 - m^2}},$$

iar costul minim¹ al instalației va fi:

$$C_{\min} = mx_0 + n\sqrt{a^2 + (b-x_0)^2} = mb + a\sqrt{n^2 - m^2}.$$

Problema admite soluții reale numai în cazul când $n \geq m$, care este de fapt și condiția reală, deoarece este evident că instalația unui cablu prin apă costă mai scump decât pe uscat.

Dacă $n = m$; cablul va fi instalat pe distanța cea mai scurtă de la U la F ; $x_0 = \|UF\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, iar $C_{\min} = m \cdot \|UF\| = m\sqrt{a^2 + b^2}$.

¹ Costul este minim deoarece $C''(x_0) = (n^2 - m^2) : x_0 > 0$; $n > m$ prin ipoteză.

Aplicație: $a = 0,5 \text{ km}$; $b = 4 \text{ km}$; $m = 6000 \text{ lei/km}$; $n = 10\,000 \text{ lei/km}$.

Se obține: $x_0 = ||UA|| = 3625 \text{ m}$; $||AF|| = 625 \text{ m}$; $C_{\min} = 28\,000 \text{ lei}$.

2. Pe malul unui râu de lățime a se află o uzină electrică A . În partea opusă râului se află o fabrică la distanța b de malul opus și la distanța c de proiecția B' a locului unde se află uzina.

Se întreabă *cum este mai economic* să se instaleze cablu care leagă uzina cu fabrica, știind că pe uscat costul instalației (inclusiv costul) cablului este de $m \text{ lei/km}$, iar prin apă de $n \text{ lei/km}$ ($n > m$).

Soluție. Folosind notațiile din figura 39, funcția al cărei *minim* se caută este:

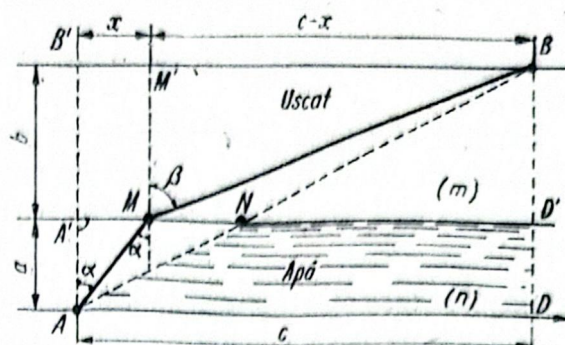


Fig. 39.

$$C(x) = n \cdot ||AM|| + m \cdot ||BM|| = n \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + m \cdot \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Egalând derivata cu zero, se obține:

$$C'(x) = \frac{nx}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{m(c-x)}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0. \quad (1)$$

Dar, din $\triangle AA'M$ și $\triangle MM'B$ se deduce:

$$\sin \alpha = \frac{||A'M||}{||AM||} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}; \quad \sin \beta = \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}, \quad (2)$$

și deci relația (1) devine:

$$n \sin \alpha - m \sin \beta = 0, \text{ sau } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{m}{n}. \quad (3)$$

Observație. Dacă dintr-un punct A (fig. 40) situat în apă, pleacă o rază de lumină și ajunge la suprafața apei în M cu viteza v_1 , apoi din M va ajunge în B cu viteza v_2 ($v_1 \neq v_2$ deoarece viteza luminii prin cele două medii apă și aer prin care trece este diferită), drumul parcurs este astfel ales, încât timpul necesar pentru a ajunge din A în B să fie cel mai mic posibil, adică expresia:

$$t = \frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2}, \quad (4)$$

să fie *minimă*. Condiția (4) se exprimă prin relația (5) care reprezintă legea refracției (descoperită de Snellius):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_2}{v_1}, \quad (5)$$

unde α și β sînt unghiurile de incidență și refracție.

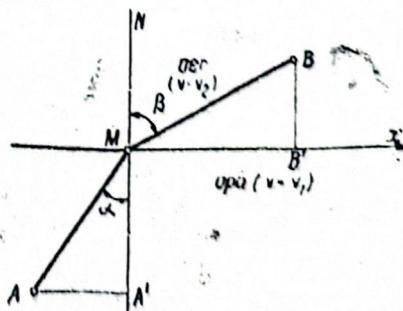


Fig. 40.

Se constată că relația obținută de noi în (3) și relația (5) au aceeași formă. Rezultă că, direcția de instalare a cablului trebuie astfel aleasă încât să urmeze drumul parcurs de raza de lumină ce trece prin două medii diferite.

Valorile lui α și β se pot obține și ca soluție a sistemului:

$$n \sin \alpha = m \sin \beta; a \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \beta = c. \quad (6)$$

Ultima ecuație rezultă din triunghiurile dreptunghice $AA'M$ și $MM'B$ (fig. 39).

Costul minim al instalației se va realiza atunci când sinusul unghiurilor formate de direcțiile celor două conducte AM și BM cu perpendicularele duse pe malul râului în A și M sînt invers proporționale cu prețurile de cost unitare al conductelor instalate pe aceste direcții (3).

Aplicație: Pentru $a = 2$ km, $b = 3$ km, $c = 7$ km, $n = 2m$, relația (1) ne conduce la ecuația:

$$3x^4 - 42x^3 + 179x^2 + 56x - 196 = 0, \quad (7)$$

care admite soluția $x_1 = 1$. Ecuația (7) mai admite o soluție negativă $x_2 \in (-2, -1)$, care nu convine problemei și două complexe. Pentru $x = 1$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$, relațiile (2) ne dau:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,447; \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,894; \alpha \approx 26^\circ 35', \beta \approx 63^\circ 35'.$$

$$C_{\min} = 2m\sqrt{1+4} + m\sqrt{9+36} = 2m\sqrt{5} + m\sqrt{45} = 5m\sqrt{5} \approx 11,18 m.$$

Dacă am instala conducta pe drumul direct ANB (fig. 39), lungimea ei ar fi fost mai mică, deoarece $\|AB\| < \|AM\| + \|MB\|$, dar costul ar fi mai mare. În acest caz, costul direct ar fi:

$$C_{AB} = m\|AN\| + n\|NB\| = 2m \cdot \frac{2}{5}\sqrt{74} + m\frac{3}{5}\sqrt{74} = \frac{7m}{5}\sqrt{74} \approx 12,04 m,$$

și reprezintă o creștere de 7,7% față de costul minim. $\|A'N\|$ și $\|ND'\|$ au fost obținute din $\triangle AA'N \sim \triangle NBD'$:

$$\frac{\|A'N\|}{a} = \frac{\|ND'\|}{b} = \frac{\|A'N\| + \|ND'\|}{a+b} = \frac{c}{a+b};$$

$$\|A'N\| = \frac{ac}{a+b} = \frac{14}{5}; \quad \|ND'\| = \frac{bc}{a+b} = \frac{21}{5};$$

$$\|AN\| = \sqrt{2^2 + 14^2 : 5^2} = \frac{2}{5}\sqrt{74}; \quad \|NB\| = \sqrt{3^2 + 21^2 : 5^2} = \frac{3}{5}\sqrt{74}.$$

3. Să se determine poziția de amplasare a unei uzine termoelectrice care urmează a deservi 3 localități ce formează un triunghi ABC , astfel încât instalația (și costul conductelor) care leagă uzina cu cele 3 localități să fie cât mai economică.

Această problemă se poate enunța și astfel: se dau 3 puncte în plan, nesituate în linie dreaptă; să se determine un al patrulea punct M , astfel încât suma distanțelor lui la cele 3 puncte să fie minimă.

Soluție. Pentru a rezolva problema folosind analiza matematică se consideră punctul $M(x, y)$ și vîrfurile triunghiului $A(-a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$ într-un sistem ortogonal xOy (fig. 41)

Funcția al cărei minim se caută este :

$$F(x, y) = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} + \sqrt{(b-x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (c-y)^2}.$$

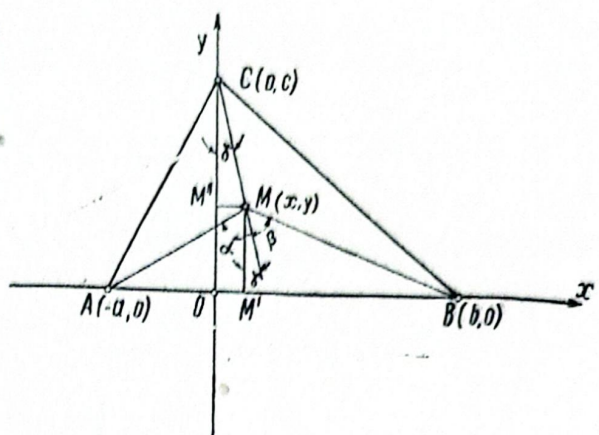


Fig. 41.

Coordonatele punctului de minim sînt soluțiile sistemului ce se obține egalînd cu zero derivatele parțiale de ordinul întâi în raport cu x și y :

$$f'_x(x, y) = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (c-y)^2}} = 0 \quad (8)$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(b-x)^2 + y^2}} - \frac{c-y}{\sqrt{x^2 + (c-y)^2}} = 0. \quad (9)$$

Rezolvarea acestui sistem prezintă unele dificultăți. Se constată însă că sistemul format din ecuațiile (8) și (9) este echivalent cu sistemul format din ecuațiile trigonometrice:

$$\sin \beta - \sin \alpha = \sin \gamma \quad (8')$$

$$\cos \beta + \cos \alpha = \cos \gamma, \quad (9')$$

care se deduc din triunghiurile dreptunghice AMM' , BMM' și CMM'' .

Într-adevăr, relația (8) se poate scrie sub forma:

$$\frac{\|M'A\|}{\|AM\|} - \frac{\|M'B\|}{\|MB\|} + \frac{\|MM''\|}{\|MC\|} = 0.$$

Cum

$$\frac{\|M'A\|}{\|AM\|} = \sin \alpha, \text{ din } \triangle AMA',$$

$$\frac{\|M'B\|}{\|MB\|} = \sin \beta, \text{ din } \triangle BMM',$$

$$\frac{\|MM''\|}{\|MC\|} = \sin \gamma, \text{ din } \triangle CMM'',$$

rezultă $\sin \alpha - \sin \beta + \sin \gamma = 0$, identică cu (8'). În mod analog se deduce și (9').

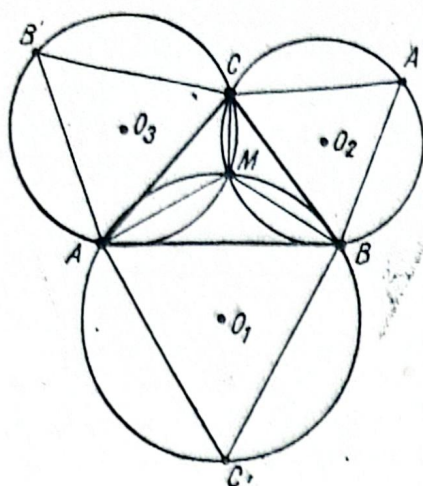


Fig. 42.

Dacă în (8') și (9') ridicăm la pătrat și adunăm obținem:

$$2 \cos(\alpha + \beta) = -1; \quad \alpha + \beta = \widehat{AMB} = 120^\circ,$$

$$\sin \gamma = 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} = \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\alpha - \beta = -2\gamma; \quad \gamma = 60^\circ - \alpha.$$

Cum $\widehat{AMC} = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - \alpha - (60^\circ - \alpha) = 120^\circ$; rezultă:

$$\widehat{AMC} = \widehat{AMB} = \widehat{BMC} = 120^\circ;$$

același rezultat obținut în cap. II, unde s-a folosit o metodă geometrică; din punctul M , laturile triunghiului se văd sub un unghi de 120° și se află la intersecția cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale ABC' , BCA' , CAB' construite pe laturile triunghiului ABC (fig. 42).

4. De-a lungul unui traseu de cale ferată se află două șantiere de construcții A și B ($\|AB\| = a$). Un al treilea șantier C se află la distanța c de linia ferată ($\|CC'\| = c$), iar distanța de la șantierul A la proiecția C' a șantierului C pe direcția AB este b ($\|AC'\| = b$). De-a

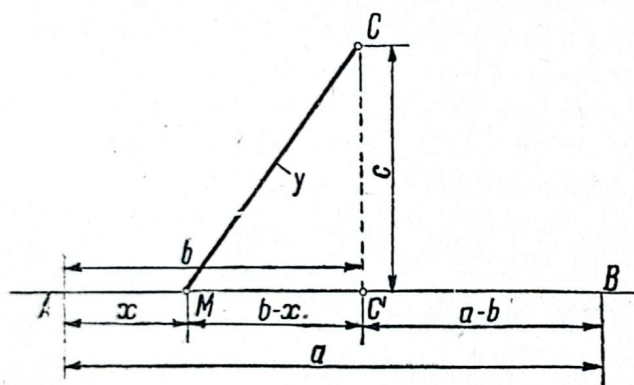


Fig. 43.

lungul căii ferate trebuie instalată o magazie de materiale M care va alimenta cele 3 șantiere A , B , C (fig. 43). Să se determine poziția de amplasare a magaziei, știind că numărul mediu zilnic de transporturi efectuate de la magazie este diferit și că suma distanțelor efectuate pentru transporturile zilnice trebuie să fie minimă.

Soluție. Dacă notăm cu N_a , N_b , N_c numărul mediu de transporturi efectuate pe zi la cele 3 șantiere A , B , C funcția al cărei minim se caută va fi:

$$L = x \cdot N_a + (a - x) N_b + \|MC\| \cdot N_c = x(N_a - N_b) + aN_b + yN_c.$$

Cum $a \cdot N_b$ este o constantă, minimul lui L este atins odată cu minimul funcției:

$$F(x) = x(N_a - N_b) + N_c \sqrt{(b - x)^2 + c^2}.$$

Derivata funcției $F(x)$:

$$F'(x) = N_a - N_b - \frac{(b - x) N_c}{\sqrt{(b - x)^2 + c^2}},$$

se anulează pentru¹:

$$x_0 = b \pm \frac{c(N_a - N_b)}{\sqrt{N_c^2 - (N_a - N_b)^2}}, \quad (10)$$

și se va lua semnul $-$ în fața radicalului, dacă $N_a > N_b$ și $+$ dacă $N_a < N_b$. Dacă $N_a = N_b$, $M = C'$ magazia va fi instalată la piciorul C' al perpendicularei $|CC'|$ pe $|AB|$ ($x_0 = b$, $y_0 = c$).

Aplicație numerică: Pentru $a = 600$ m, $b = 400$ m, $c = 240$ m, $N_a = 10$, $N_b = 6$, $N_c = 5$, se va găsi:

$$x_0 = 400 - \frac{240 \cdot (10 - 6)}{\sqrt{5^2 - (10 - 6)^2}} = 800 \text{ m},$$

$$y_0 = \sqrt{(400 - 80)^2 + 240^2} = 400 \text{ m}.$$

$$L_{\min} = 80(10 - 6) + [600 \cdot 6 + 400 \cdot 5] = 5920 \text{ m}.$$

Dacă $N_a = 6$ și $N_b = 10$, adică $N_a < N_b$, s-ar fi luat semnul $+$ în fața radicalului și rezultatul ar fi fost același ($x_0 = 80$, $y_0 = 400$).

Dacă $N_a = N_b = 6$; $x_0 = b = 400$ m; $y_0 = c = 240$ m;

$$L_{\min} = aN_b + y_0N_c = 600 \cdot 6 + 240 \cdot 5 = 4800 \text{ m}.$$

În general, poziția de amplasare a magaziei este dată de relația (10),

$$y = \frac{c \cdot N_c}{\sqrt{N_c^2 - (N_a - N_b)^2}}; \quad L_{\min} = bN_a + (a - b)N_b + c\sqrt{N_c^2 - (N_a - N_b)^2}.$$

5. O fabrică se află situată între două șosele perpendiculare Ox și Oy . Se cere să se construiască un drum rectiliniu care să unească fabrica cu cele două șosele, astfel încât costul acestui drum să fie minim, adică lungimea $\|PA\| + \|PB\| = \|AB\|$ să fie minimă.

Soluție. Folosind notațiile din fig. 44, funcția al cărei minim se caută este:

$$f(x, y) = \sqrt{(a - x)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (y - b)^2}, \quad (11)$$

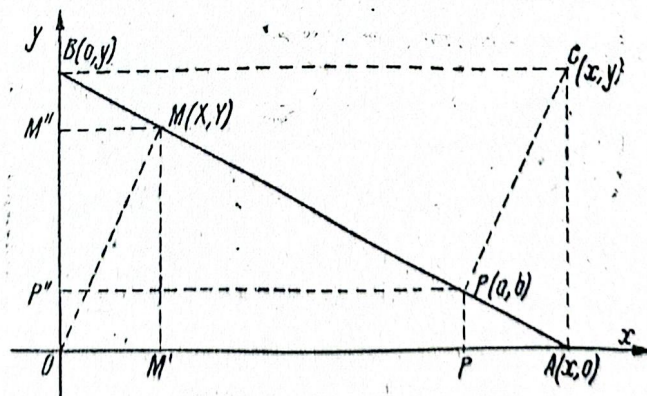


Fig. 44.

¹ x_0 corespunde unui minim deoarece $f''(x_0) = c^2 \cdot N_c [N_c^2 - (N_a - N_b)^2]^{3/2} > 0$;

și deoarece punctul $P(a, b)$ se află pe dreapta AB , avem și relația de legătură între x și y :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1. \quad (12)$$

Eliminând pe y între relațiile (11) și (12) se obține:

$$f(x) = \frac{x}{x-a} \sqrt{b^2 + (a-x)^2}.$$

Derivata acestei funcții:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}} - \frac{a\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{(x-a)^2},$$

se anulează¹ pentru:

$$x_0 = a + \sqrt[3]{ab^2}; \quad y_0 = b + \sqrt[3]{a^2b}.$$

Lungimea minimă a drumului va fi:

$$\min f = \|AB\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^{3/2}.$$

Aplicație numerică: Dacă $a = 8$ km și $b = 1$ km, găsim:

$$x_0 = 8 + \sqrt[3]{8} = 10, \quad y_0 = 1 + \sqrt[3]{64} = 5,$$

$$\min f = \|AB\| = (\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{1})^{3/2} = 5\sqrt{5} \approx 11,180 \text{ km}.$$

Observații. Se poate arăta că perpendiculara în A pe Ox , în B pe Oy și în P pe $|AB|$ sînt concurente și deci patrulaterul $OACB$ este un dreptunghi. De asemenea, se constată că perpendiculara din O pe $|AB|$ determină pe $|AB|$ un segment $\|BM\| = \|PA\|$, deoarece $\triangle OMB = \triangle APC$.

6. Dintr-o foaie de carton sau de tablă de forma unui poligon regulat cu n laturi se cere să se construiască o cutie în formă de piramidă dreaptă, a cărei bază să fie un poligon regulat cu același număr n de laturi, astfel încît capacitatea ei să fie maximă.

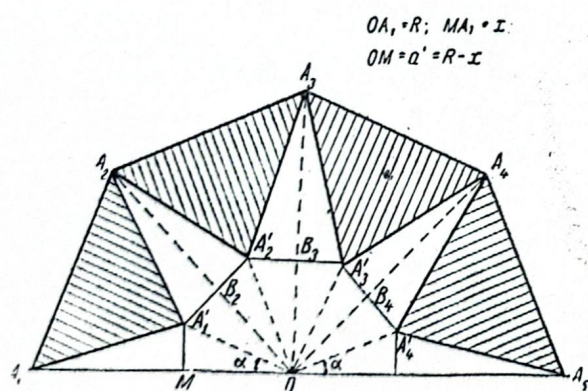


Fig. 45.

Soluție. Dacă notăm cu R raza cercului circumscris poligonului $A_1 A_2 \dots A_n$ și cu a apotema poligonului de bază, $A'_1 A'_2 \dots A'_n$, condiția de posibilitate a construcției (așa cum rezultă din figura 45) este:

$$0 \leq \|OB_1\| \leq \frac{R}{2}, \text{ sau } 0 \leq a \leq \frac{R}{2}.$$

¹ Se constată prin calcul că $f''(x_0) > 0$; și deci x_0 corespunde unui minim.

Cazurile limită $a = \frac{R}{2}$ și $a = 0$ conduc la un volum egal cu zero.

Dacă notăm cu:

L — latura poligonului dat $A_1 A_2 \dots A_n$,

l — latura poligonului de bază $A'_1 A'_2 \dots A'_n$,

$\alpha = \frac{\pi}{n}$, unghiul la centru format de $|OA_i|$ și $|OA'_i|$,

$x = ||OA'_i||$, raza cercului circumscris poligonului $A'_1 A'_2 \dots A'_n$, se obțin relațiile:

$$l = 2x \sin \alpha, \quad a = x \cos \alpha, \quad ||A_1 B_1|| = R - x \cos \alpha. \quad (13)$$

Dacă h și V reprezintă înălțimea și volumul piramidei obținute după decuparea triunghiurilor hașurate și îndoirea triunghiurilor rămase (de-a lungul dreptelor $A'_1 A'_2, A'_2 A'_3, \dots, A'_n A'_1$) pînă cînd se întîlnesc toate într-un singur punct (vîrfurile piramidei), vom putea scrie:

$$h^2 = ||A_1 B_1||^2 - ||OB_1||^2 = (R - x \cos \alpha)^2 - x^2 \cdot \cos^2 \alpha = R^2 - 2 R x \cos \alpha;$$

$$V = \frac{S \cdot h}{3} = \frac{n \cdot l \cdot a \cdot h}{6} = k \cdot x^2 \sqrt{R^2 - 2 R x \cos \alpha}; \text{ unde } k = \frac{n \sin 2\alpha}{6}.$$

$$V' = \frac{2 R^2 x - 5 R x^2 \cos \alpha}{\sqrt{R^2 - 2 R x \cos \alpha}} = 0; \Rightarrow x_1 = \frac{2}{5} R \sec \alpha; \quad x_2 = 0.$$

Se constată că $x_2 = 0$, corespunde unui minim¹ ($V = 0$), iar x_1 unui maxim. Se va găsi:

$$a = \frac{L}{5} \operatorname{cosec} \alpha; \quad \max V = \frac{\sqrt{5}}{750} n L^3 \cdot \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha. \quad (14)$$

Observație: Dacă $n = 3$, valoarea maximă a apotemei pentru care se poate realiza o construcție a piramidei este: $a = \frac{R}{4}$.

Cum maximul lui a ce corespunde lui $n = 3$, obținut prin formulele de mai sus este:

$$a = \frac{L}{5} \operatorname{cosec} \alpha = \frac{2R \sin \alpha}{5} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2R}{5} > \frac{R}{4},$$

acest maxim nu poate fi atins. Volumul maxim al piramidei triunghiulare regulate se va obține pentru $a = \frac{R}{4}$, care este cea mai mare valoare a lui

a apropiată de $\frac{2R}{5}$, pentru care construcția este posibilă.

Piramida triunghiulară astfel obținută are toate fețele triunghiuri echilaterale egale, este deci un tetraedru regulat cu muchia $L/2$.

x	$-x_1$	0	$x_1/2$	x_1	$2x_1$
$V'(x)$	-	0 (m)	+	0 (M)	-

$x_1 = \frac{2}{5} R \sec \alpha; \quad x_2 = 0$

Folosind formulele de mai sus, cititorul poate calcula singur valorile apotemei (a), a laturei (l) pentru poligonul bazei, precum și $\max V$, pentru $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$.

7. Uneori, vopselele se vînd în cutii de tablă cilindrice cu un volum $v = 250 \text{ cm}^3$. Ele au o deschidere circulară care se închide cu un capac din material plastic. Raportul dintre diametrul acestei deschideri și diametrul cutiei este 4 : 5.

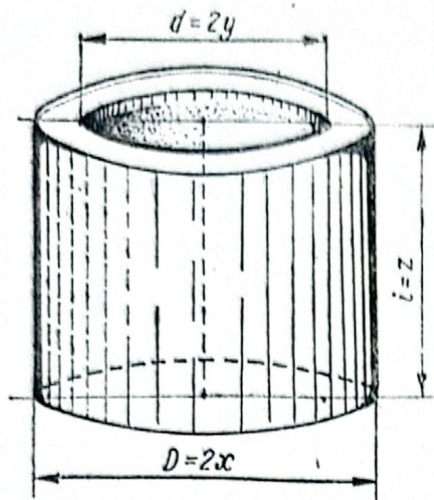


Fig. 46.

Să se determine dimensiunile cutiei, astfel încît costul tablei necesare confecționării ei să fie minim.

Soluție. Folosind notațiile din figura 46, funcția al cărei minim se caută se compune din aria laterală, aria bazei și aria coroanei circulare :

$$f(x, y, z) = 2\pi xz + \pi x^2 + \pi(x^2 - y^2),$$

cu relațiile de legătură : $y : x = 4 : 5$ și $\pi x^2 z = 250$.

Eliminînd pe y și z între aceste relații, găsim funcția :

$$f(x) = 2\pi \left(\frac{250}{\pi x} + \frac{17}{25} x^2 \right).$$

Derivata acestei funcții :

$$f'(x) = 2\pi \left(\frac{34x}{25} - \frac{250}{\pi x^2} \right),$$

se anulează pentru $x = \sqrt[3]{6250 : 34\pi} \approx 3,88 \text{ cm}$. Cum $f''(x) = 2\pi \left(\frac{34}{25} + \frac{500}{\pi x^3} \right) > 0$ pentru $x = 3,88$, valoarea găsită corespunde unui minim.

Se va găsi apoi $D = 77,6 \text{ mm}$; $d = 62 \text{ mm}$; $i = z = 52,8 \text{ mm}$, iar costul minim al tablei necesare confecționării unei cutii va fi :

$$\min C = 0,0192 \text{ c lei},$$

unde c este costul unui metru pătrat de tablă.

8. Stivele de cărbuni-brichete au secțiunea unui dreptunghi sau un pătrat. Pentru a fi ferite contra intemperiei atmosferice, ele se acoperă cu scînduri sprijinite pe stivă și pe sol, egal înclinate față de sol (fig. 47).

Se întreabă sub ce unghi trebuie așezate scîndurile pentru a întrebuința cît mai puțin material lemnos.

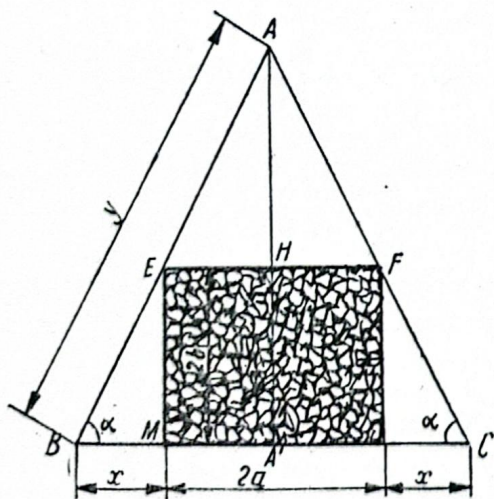


Fig. 47.

Soluție. Dacă notăm cu $2a$, $2b$ dimensiunile secțiunii dreptunghiulare și cu α unghiul de înclinare a unei scânduri față de sol, *suprafața minimă* a materialului lemnos va fi dată de minimul laturii $AB = y$:

$$\|AB\| = \|BA'\| : \cos \alpha.$$

Folosind notațiile (din fig. 47), se obține:

$$\|BA'\| = \|BM\| + \|MA'\| = x + a = 2b \operatorname{ctg} \alpha + a,$$

iar funcția a cărei minim se caută va fi:

$$y = \frac{a}{\cos \alpha} + \frac{2b}{\sin \alpha}.$$

Anulând derivata acestei funcții:

$$y' = \frac{a \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{2b \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0,$$

se va găsi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{2b : a}, \quad x = 2b : \operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{4a \cdot b^2}.$$

Observație: Dacă se consideră distanța $\|BM\| = x$ ca variabilă, funcția a cărei minim se cere este:

$$y = \frac{a+x}{x} \sqrt{4b^2 + x^2},$$

a cărei derivată:

$$y' = \frac{a+x}{\sqrt{4b^2 + x^2}} - \frac{a\sqrt{4b^2 + x^2}}{x^2} = 0$$

se anulează pentru $x = \sqrt[3]{4ab^2}$, adică se obține același rezultat.

În cazul particular $a = b$, adică secțiunea este un pătrat, $x = a \sqrt[3]{4} \approx 1,587 a$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{2}$; $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt[3]{2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,26 \approx 51^\circ 30'$; $y = \frac{x+a}{\cos \alpha} = \frac{2,587 a}{0,622} \approx 4,16 a$.

Probleme propuse

1. Procesul de sulfurare și clorurare a compușilor organici se realizează uneori cu ajutorul luminii.

Să se determine înălțimea la care trebuie așezată sursa de lumină deasupra unei platforme circulare de rază a , unde au loc reacțiile, pentru ca iluminarea platformei să fie *maximă*, știind că intensitatea luminoasă¹

¹ Unitatea de măsură pentru intensitatea luminoasă este candela (cd), cuvânt care în latină înseamnă luminare.

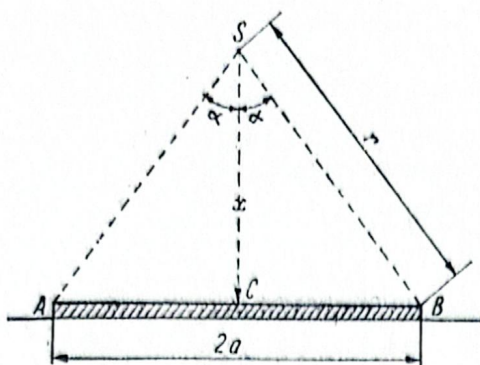


Fig. 48.

I pe direcția verticală este cunoscută, iar iluminarea¹ E este dată de formula :

$$E = (I : r^2) \cdot \cos \alpha,$$

unde α este unghiul de incidență al razelor ce cad pe această suprafață.

R. Folosind notațiile din fig. 48, se va găsi :

$$E = I \cdot x (x^2 + a^2)^{-3/2};$$

max E are loc pentru $x = a \sqrt{2} : 2$;

$$\max E = (2\sqrt{3} \cdot I) : 9 a^2 \text{ (lx)}.$$

În cazul particular $a = 10$ m, se va găsi $x = 7,07$ m.

2. Un lucrător trebuie să deplaseze o piesă de bronz pe o placă de fontă așezată pe un plan orizontal, cu ajutorul unei forțe Q .

Masa piesei fiind $P = 100$ kg, iar coeficientul de frecare dintre bronz și fontă $\mu = 0,2$, se cere să se determine unghiul α dintre direcția forței și planul orizontal, astfel încât forța Q necesară acestei deplasări să fie minimă (fig. 49).

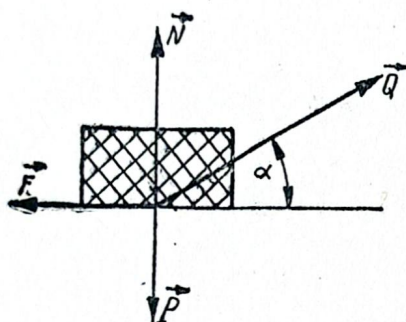


Fig. 49.

R. Din figură se constată că echilibrul forțelor $F = \mu N$, Q și P este asigurat dacă :

$$F = Q \cos \alpha,$$

$$P = N + Q \sin \alpha.$$

Funcția Q a cărei minim se caută va fi :

$$Q = \mu P : (\cos \alpha + \mu \sin \alpha).$$

Se va găsi $|\alpha = \arctg \mu$; min $Q = \mu P : \sqrt{1 + \mu^2}$. Cu datele problemei se obține : $\arctg \alpha = 0,2$; $\alpha = 11^\circ 20'$; min $Q = 0,2 \cdot 100 : \sqrt{1 + 0,2^2} \approx 19,6$ kg.

3. În circuitul din figura 50, rezistențele R_1 și R_2 sînt montate în serie, iar R_3 și R_4 în paralel. Știind că $R_1 = 4 \Omega$, $R_3 = 9 \Omega$, să se determine rezistențele $R_2 = R_4 = x$, astfel încît intensitatea curentului care trece prin rezistența R_3 să fie maximă.

R. Se va găsi :

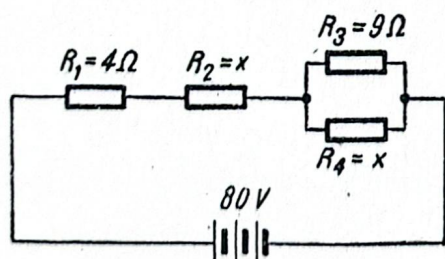


Fig. 50.

$$I_1 = I_2 = \frac{80 (x + 9)}{x^2 + 22x + 36},$$

iar din legile lui Kirchhoff :

$$I_3 + I_4 = I_1;$$

$$I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0;$$

¹ Unitatea de măsură pentru iluminare este luxul (lx) și reprezintă iluminarea produsă asupra unei suprafețe, de lumina de o candelă care cade de la distanța de 1 m, perpendicular pe o suprafață.

se obține :

$$I_3 = \frac{80x}{x^2 + 22x + 36}; \quad I'_3 = 0;$$

ne va da

$$R_2 = R_4 = x = 6\Omega; \quad \max I_3 = 2,35 \text{ A.}$$

4. Un câmp electric produs de o sarcină Q este repartizat uniform pe un disc de rază R (fig. 51).

Să se determine poziția punctului M situat pe axul discului în care intensitatea câmpului are valoarea *maximă*.

R. Intensitatea câmpului electric E într-un punct situat pe axul inelului la distanța x de centrul lui este dat de relația :

$$E = Qx : \epsilon (R^2 + x^2)^{3/2},$$

unde ϵ este constanta dielectrică absolută a mediului. Se va găsi :

$$x = R\sqrt{2} : 2, \quad \max E = 2Q\sqrt{3} : 9 R^2\epsilon.$$

5. Un rezervor avînd baza un pătrat și pereții verticali, este deschis la partea superioară. Știind că are o capacitate de 32 000 m³, să se determine dimensiunile lui astfel încît costul tablei din care este confecționat să fie *minim*.

R. Funcția a cărei minim se caută este : $S = x^2 + 4xy$; unde x este latura pătratului de bază iar y înălțimea rezervorului.

Cum

$$V = x^2y = 32 \cdot 10^3;$$

se obține

$$S = x^2 + 128 \cdot 10^3 : x.$$

Se va găsi :

$$x = 40 \text{ m}, \quad y = 20 \text{ m}, \quad \min S = 4800 \text{ m}^2.$$

6. Dintr-o foaie de carton dreptunghiulară de dimensiuni a, b se taie de la colțuri cîte un pătrat de latură x . Îndoind apoi dreptunghiurile rămase se obține o cutie paralelipipedică fără capac (fig. 52).

Să se determine latura x a pătratului, astfel încît capacitatea ei să fie *maximă*.

R. Funcția a cărei maxim se cere este:

$$V = x(a - 2x)(b - 2x).$$

$$V' = 12x^2 - 4(a + b)x + ab,$$

se va găsi¹

$$x_0 = \frac{1}{6} (a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}).$$

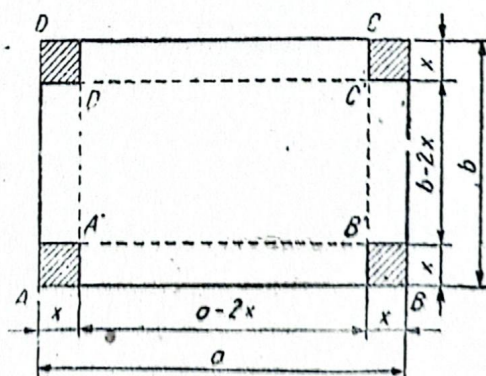


Fig. 52.

¹ Cum $V''(x_0) = -4\sqrt{a^2 + b^2 - ab} < 0$; $x_0 = \frac{1}{6} (a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2})$ corespunde

unui maxim.

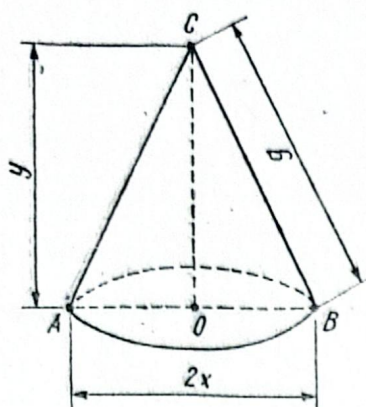


Fig. 53.

În cazul particular $b=a$, se obține $x_0=a:6$;
 $\max V = 2a^3:27$.

7. Să se determine dimensiunile unui pahar conic de capacitate dată V , astfel încât costul materialului din care este confecționat să fie minim (fig. 53).

R. Se cere $\min S = \pi x g = \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$, știind că

$$\pi x^2 y = 3V, \quad S = \pi \sqrt{x^4 + k : x^2},$$

$$k = 9V^2 : \pi^2; \quad S' = 0,$$

ne conduce la :

$$x = \sqrt[3]{3V : \pi \sqrt{2}}; \quad y = \sqrt[3]{6V : \pi}; \quad y = x \sqrt{2}.$$

Înălțimea conului este egală cu latura pătratului înscris în cercul de bază al conului.

8. Se cere să se determine dimensiunile unei cutii fără capac, confecționată din tablă, cu baza un dreptunghi, de volum dat V , astfel încât costul tablei din care este confecționată cutia să fie minim. Aplicație $V = 4 \text{ dm}^3$

R. Dacă x, y, z sînt dimensiunile cutiei, funcția a cărei minim se cere este aria $S = xy + 2xz + 2yz$. Condiția $V = xyz$, ne va da $S = xy + 2z(x + y) = xy + 2V \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.

Cum $S'_x = y - 2V : x^2 = 0$, $y \cdot x^2 = 2 \cdot V$; $S'_y = x - 2 \cdot V : y^2 = 0$; $xy^2 = 2V$, se obține: $x = y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \sqrt[3]{V : 4}$; $\min S = 3 \cdot \sqrt[3]{4V^2}$.

Aplicație: $x = y = 2 \text{ dm}$, $z = 1 \text{ dm}$; $\min S = 12 \text{ dm}^2$.

9. Dintr-o foaie de tablă lată de $a \text{ dm}$ se confecționează un jgheab a

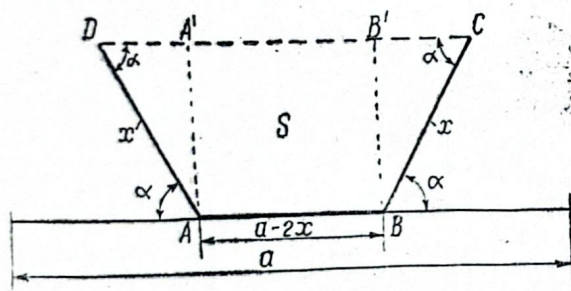


Fig. 54.

cărei secțiune este un trapez. În acest scop, tabla se îndoaie în lungime pe ambele părți cu câte o fișie de aceeași lățime, astfel ca pereții laterali să formeze cu fundul jgheabului unghiuri egale cu 60° (fig. 54).

Ce lățime trebuie să aibă fișiile îndoite, pentru ca debitul apei care se scurge prin acest jgheab să fie maxim?

R. Debitul maxim Q se va realiza odată cu maximul secțiunii prin jgheab. Funcția a cărei maxim se caută este:

$$S(x) = ax \sin \alpha + x^2(\sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha).$$

Cum

$$S'(x) = a \sin \alpha + 2x (\sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha) = 0,$$

ne dă $x = a : (4 - 2 \cos \alpha)$. Pentru $\alpha = 60^\circ$ se obține

$$x = a : 3; \quad \max S = a^2 \cdot \sqrt{3} : 12 \approx 0,144 a^2.$$

10. Să se rezolve problema 9 în ipoteza că $\|AB\| = a$, $\|AD\| = \|BC\| = x = b = \text{constant}$, iar α variabil (fig. 54).

R. Funcția a cărei maxim se cere este:

$$S(\alpha) = (a + b \cos \alpha) b \sin \alpha.$$

$$S'(\alpha) = 2 b^2 \cos^2 \alpha + ab \cos \alpha - b^2 = 0,$$

ne dă: $\cos \alpha = (-a \pm \sqrt{a^2 + 8 b^2}) : 4b$. Dacă $b = a$, $\cos \alpha = -1$, $\alpha = 180^\circ$ și conduce la un minim ($\min S = 0$); sau $\cos \alpha = 1:2$; $\alpha = 60^\circ$, și conduce la un maxim¹ ($\max S = 3a^2 \sqrt{3} : 4$).

¹ $S''(\alpha) = -b(a + 4b \cos \alpha) \cdot \sin \alpha$; $S''(60^\circ) = -b(a + 2b) \sqrt{3} : 2 < 0$; $\alpha = 60^\circ$ corespunde unui maxim.

APLICAȚII ALE CALCULULUI INTEGRAL

§ 1. Calculul ariilor suprafețelor plane

Fie f o funcție pozitivă și continuă pe $[a, b]$. Mulțimea $S_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ a punctelor din plan mărginită de axa Ox , graficul funcției f și dreptele $x = a$, $x = b$, are arie și aria sa este egală cu

$$\text{aria } (S_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Dacă $f \leq 0$, atunci $\text{aria } (S_f) = - \int_a^b f(x) dx$, deoarece $|f| = -f$.

Exemple.

1. Să se calculeze aria mulțimii cuprinsă între graficul funcției $y = f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ și axa Ox .

Soluție

$$\text{aria } (S_f) = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\pi} \sin x \cdot dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) \cdot dx = 4.$$

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi], \\ -\sin x, & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

2. Se cere aria mulțimii determinată de curba de ecuație: $y^2 \cdot (2a - x) = x^3$, $a > 0$ (numită CISOIDA LUI DIOCLEȘ) și dreapta $x = 2a$ (fig. 55).

Soluție. Aria mărginită de graficul funcției $f = \sqrt{x^3 : (2a - x)}$ și un punct de abscisă x este:

$$\text{aria } (S_f) = 2 \int_0^a \sqrt{\frac{x^3}{2a - x}} \cdot dx, \quad x \in [0, 2a).$$

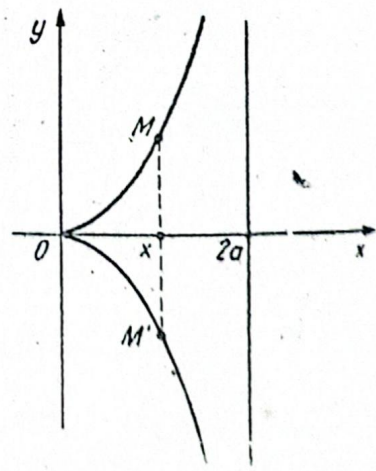


Fig. 55.

Schimbarea de variabilă prin funcția $\varphi: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow [0, 2a)$, unde $\varphi(t) = 2a \sin^2 t$, ne conduce la:

$$\begin{aligned} \text{aria } (S_f) &= 16a^2 \cdot \int_0^t \sin^4 t \cdot dt = 2a^2 \left| 3t - 3 \sin t \cdot \cos t - 2 \sin^3 t \cos t \right|_0^{\pi/2} = \\ &= 3\pi a^2. \end{aligned}$$

3. Se cere aria mulțimii delimitată de curba de ecuație:

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2), \quad a > 0 \text{ (numită STROFOIDĂ),}$$

precum și aria mulțimii determinată de curbă și dreapta $x = a$ (fig. 56).

Soluție. Aria buclei de strofoidă (S_f'):

$$\begin{aligned} \text{aria } (S_f') &= 2 \int_{-a}^0 x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx, \\ x &\in [-a, 0]. \end{aligned}$$

Schimbarea de variabilă prin funcția

$$\varphi: \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, -a],$$

unde $\varphi(t) = a \cos 2t$ ne conduce la:

$$\begin{aligned} \text{aria } (S_f') &= 2a^2 \int_{\pi/2}^{\pi/4} (2 \cos^4 t - \cos^2 t) \cdot dt = 2a^2 \left| t + \sin t \cos t + 2 \sin t \cos^3 t \right|_{\pi/2}^{\pi/4} = \\ &= \frac{a^2}{2} (4 - \pi). \end{aligned}$$

Aria (S_f'') mărginită de curbă și dreapta $x = a$.

Schimbarea de variabilă prin funcția

$$\varphi: \left[\frac{\pi}{4}, 0\right) \rightarrow [0, a)$$

unde $\varphi(t) = a \cos 2t$, ne dă:

$$\begin{aligned} \text{aria } (S_f'') &= 2a^2 \int_0^{\pi/4} (2 \cos^4 t - \cos^2 t) \cdot dt = 2a^2 \left| t + \sin t \cos t + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin t \cos^3 t \right|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2} (4 + \pi). \end{aligned}$$

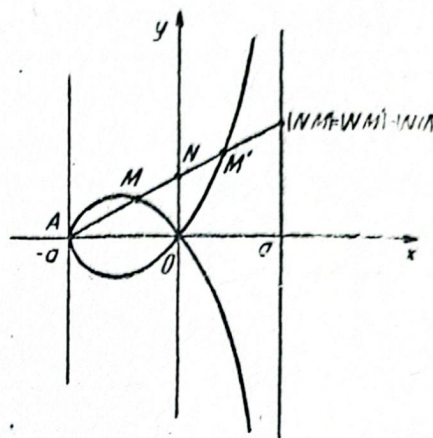


Fig. 56.

§ 2. Volumul corpurilor de rotație

Fie f o funcție continuă, definită pe un interval $[a, b]$, și A mulțimea cuprinsă între curba $y = f(x)$, axa Ox și dreptele $x = a$, $x = b$ (fig. 57 a, b).

Volumul V al corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a acestei mulțimi este dat de integrala:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Exemple

1. Un turn de răcire de la o centrală termoelectrică are forma unui hiperboloid de rotație¹ (fig. 58).

Folosind dimensiunile din figură (date în metri) se cere:

- volumul părții interioare;
- diametrul deschiderii superioare.

Soluție. Deoarece volumul interior al turnului se obține prin rotirea mulțimii H delimitată de arc de hiperbolă CM (a cărei ecuație este $x^2 : 36 - 3y^2 : 625 = 1$) și de dreptele $y = 5$, $y = -25$ în jurul axei Oy , avem

$$V = \pi \int_{-25}^5 x^2(y) dy = 36\pi \int_{-25}^5 \left(1 + \frac{3y^2}{625}\right) dy = 36\pi \left| y + \frac{y^3}{625} \right|_{-25}^5 = 1987,2 \pi.$$

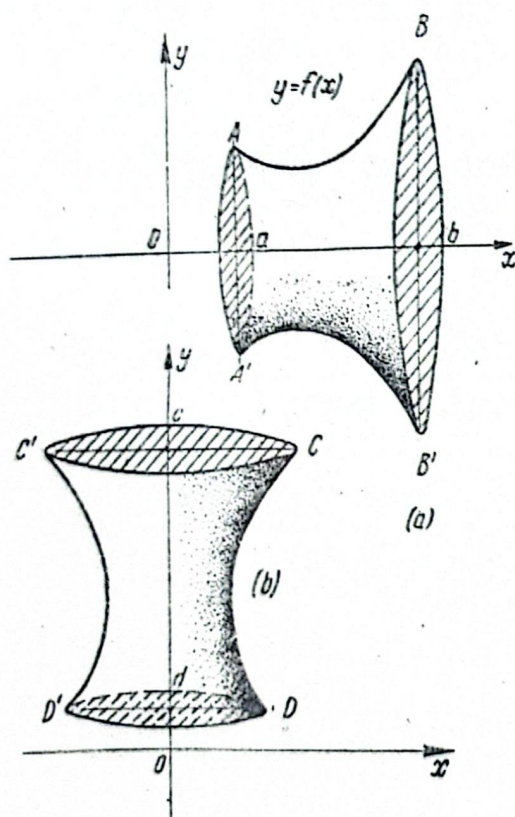


Fig. 57.

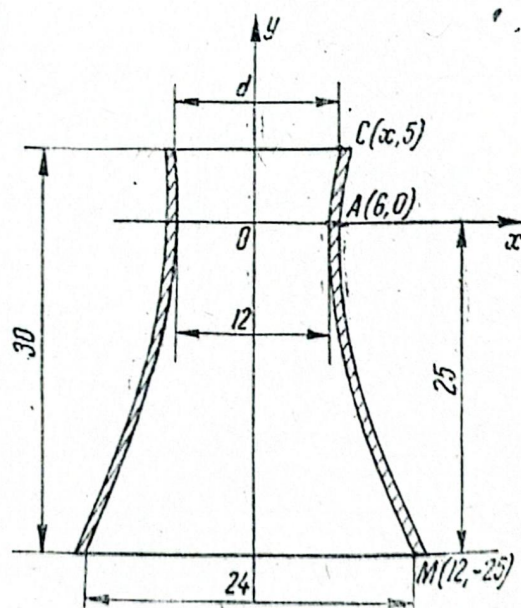


Fig. 58.

¹ Corpul obținut prin rotația unei hiperbole în jurul uneia din axe.

Diametrul deschiderii superioare se obține calculând abscisa punctului C, a cărui ordonată este $y = 5$.

Folosind ecuația hiperbolei, găsim:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{3 \cdot 25}{625} = 1, \quad x^2 = 36 \left(1 + \frac{3}{25} \right), \quad x = 2,4\sqrt{7} \approx 6,35. \quad d = 12,70 \text{ m.}$$

Observație. Pentru a obține ecuația hiperbolei, se pune condiția ca punctele $A(6, 0)$ și $M(13, -25)$ să fie situate pe curbă.

Se obține sistemul:

$$\frac{36}{a^2} = 1; \quad \frac{144}{a^2} - \frac{625}{b^2} = 1; \quad a^2 = 36; \quad b^2 = \frac{625}{3}.$$

2. Un cazan în formă cilindrică se termină cu un segment de paraboloid (fig. 59), generat de parabola:

$$y = \frac{h}{d^2} \cdot x^2.$$

Se cere:

a. lungimea a , a cazanului (partea cilindrică);

b. aria secțiunii axiale a cazanului, s ;

c. volumul cazanului, știind că $h = 4 \text{ m}$, $d = 1 \text{ m}$.

Soluție:

a. Valoarea lui a se obține din ecuația parabolei, știind că punctul A se află pe parabolă:

$$y = \frac{h}{d^2} \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{h}{4},$$

$$a = h - \frac{h}{4} = \frac{3h}{4}.$$

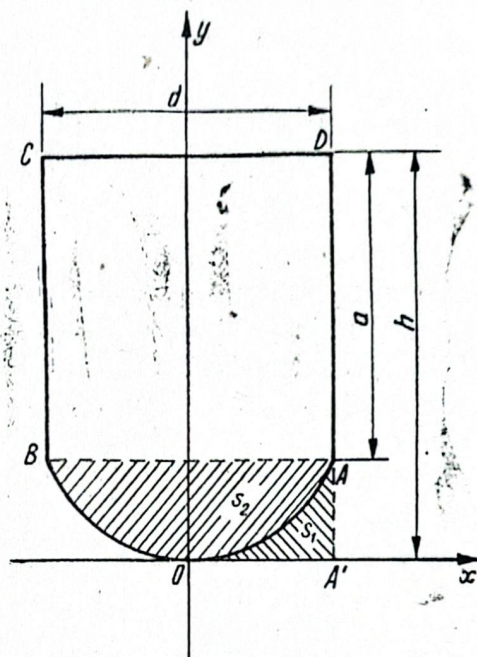


Fig. 59.

b. Aria mulțimii s_1 mărginită de arc de parabolă OA , axa Ox și ordonata AA' este:

$$\text{Aria } (s_1) = \frac{h}{d^2} \int_0^{d/2} x^2 dx = \frac{hd}{24}.$$

Aria (s_2) mărginită de arc de parabolă AOB și dreapta AB este:

$$\text{Aria } (s_2) = ||SB|| \cdot AA' - 2s_1 = d \cdot \frac{h}{4} - 2 \cdot \frac{hd}{24} = \frac{hd}{6}.$$

Aria (s_3) a dreptunghiului $ABCD$ este:

$$\text{Aria } (s_3) = d \left(h - \frac{h}{4} \right) = \frac{3}{4} hd, \quad s = s_2 + s_3 = \frac{hd}{6} + \frac{3hd}{4} = \frac{11}{12} hd \text{ m}^2.$$

c. Dacă notăm cu V_1 și V_2 volumul segmentului de paraboloid și al cilindrului, se obține:

$$V_1 = \pi \int_0^{h/4} x^2(y) dy = \pi \frac{d^2}{h} \int_0^{h/4} y dy = \pi \frac{d^2 h}{32}, \quad V_2 = \frac{3\pi d^2 h}{16}.$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi d^2 h}{32} + \frac{3\pi d^2 h}{16} = \frac{7\pi d^2 h}{32}.$$

În cazul particular dat ($h = 4$ m, $d = 1$ m):

$$s = \frac{11}{3} \text{ m}^2, \quad V = \frac{7\pi}{8} \approx 2,747 \text{ m}^3.$$

3. În figura 60 se poate vedea secțiunea axială a unei *babale* (o piesă turnată din fontă, de care se fixează otgoanele vapoarelor ancorate în port).

Curbele laterale ale secțiunii axiale sînt ramuri de hiperbolă, iar partea de sus a babalei se termină cu o jumătate de elipsă (fig. 60).

Să se calculeze masa întregii babale, știind că este făcută din fontă ($\gamma = 7,1 \text{ kg/dm}^3$).

Soluție. Vom calcula pe rînd volumele determinate prin rotirea mulțimii mărginită de arcul de hiperbolă AD , dreptele $y = 0$, $y = 3$ în jurul axei Oy , apoi volumul obținut prin rotirea mulțimii mărginită de arcul de elipsă AC , dreptele $x = 0$, $x = 1$ în jurul axei Ox , precum și volumul cilindrului.

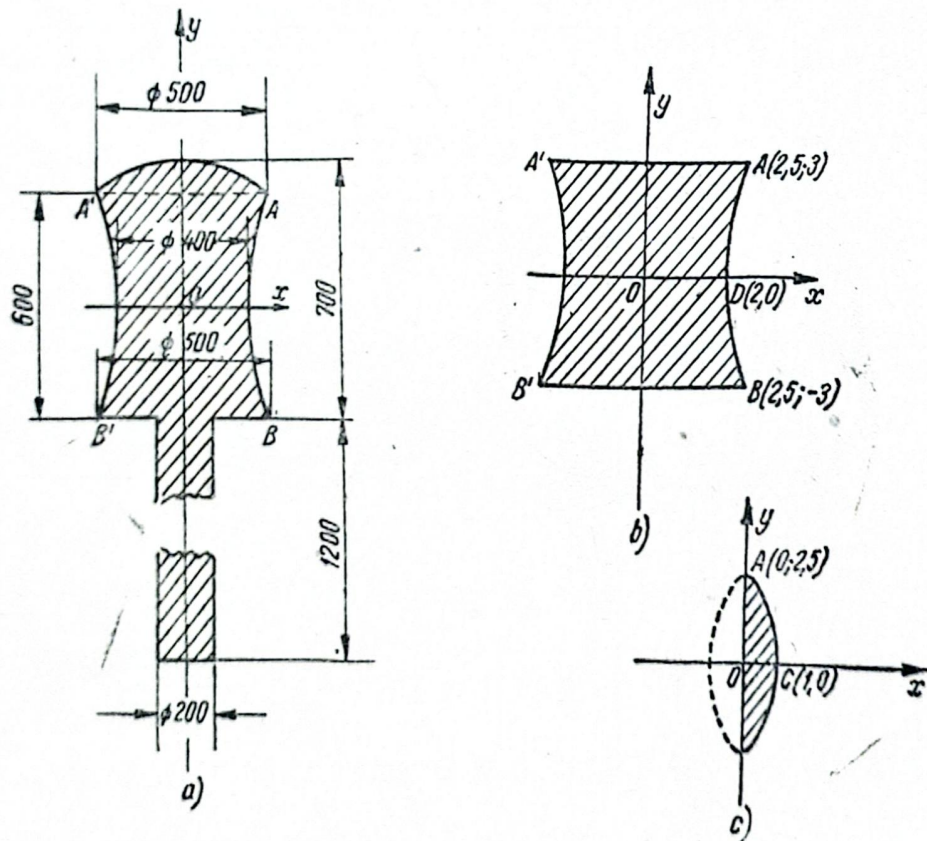


Fig. 60.

— Volumul (V_1) determinat de arcul de hiperbolă AD .

Dimensiunile din figura 60, a au fost transformate în decimetri în fig. 60, b și c . Se deduce ecuația hiperbolei știind că trece prin punctele $A(2, 5; 3)$, $D(2, 0)$ $x^2 : 4 - y^2 : 16 = 1$; $x^2 = 4(1 + y^2 : 16)$

$$V_1 = 2\pi \cdot \int_0^3 4 \left(1 + \frac{y^2}{16}\right) dx = \frac{57}{2} \pi.$$

— Volumul (V_2) determinat de arcul de elipsă AC .

Se deduce ecuația elipsei știind că trece prin punctele $A(0; 2,5)$, $C(1,0)$: $x^2 : 1 + y^2 : 6,25 = 1$; $y^2 = 6,25(1 - x^2)$

$$V_2 = \pi \cdot \int_0^1 6,25(1 - x^2) \cdot dx = \frac{12,5\pi}{3}.$$

— Volumul cilindrului: $V_3 = \pi r^2 h = 12\pi$.

Masa întregii babale va fi:

$$G = V \cdot \gamma = (V_1 + V_2 + V_3) \gamma = \left(\frac{57\pi}{2} + \frac{12,5\pi}{3} + 12\pi\right) \gamma =$$

$$= \frac{134}{3} \pi \gamma \approx 995,6 \text{ kg}.$$

4. Inelul cilindric¹ a cărui formă se poate vedea în fig. 61 este foarte des folosit în tehnică, ca piesă componentă a diferitelor mașini (garnituri sau manșon).

Să se calculeze masa unui inel cilindric ale cărui dimensiuni sînt $r=2$ cm, $R=12$ cm, știind că este confecționat din oțel ($\gamma = 7,8$ kg/dm³).

Soluție. Ecuația cercului cu centrul în $O'(0, R)$ și cu raza r este:

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2$$

Dacă notăm cu y_1 și y_2 ecuațiile celor două semicercuri ABA' , respectiv $AB'A'$, se obține:

$$y_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y_2(x) =$$

$$= R - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

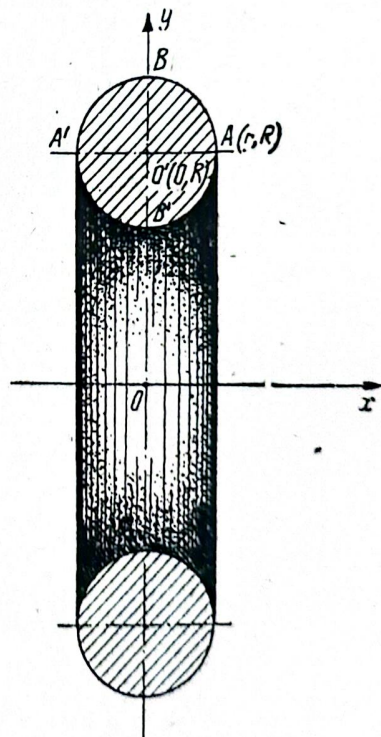


Fig. 61.

¹ Secțiunea într-un inel cilindric poate fi un cerc sau o elipsă. În anumite cazuri speciale el poate avea ca secțiune o figură oarecare a cărei formă depinde de scopul pentru care este confecționat.

Volumul (V) al inelului este dat de :

$$V = 2\pi \int (y_1^2 - y_2^2) \cdot dx = 8\pi R \int_0^a \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = 2\pi^2 r^2 R.$$

În cazul particular dat, masa inelului va fi : $G = 7,4$ kg.

Observație: Volumul inelului¹ se poate obține și cu ajutorul teoremei lui Guldin² :

Volumul (V) al corpului obținut prin rotația unei suprafețe plane în jurul unei axe situată în planul său și pe care nu o taie, este egal cu produsul dintre aria acelei suprafețe (A) și lungimea cercului descris de centrul de greutate al suprafeței :

$$V = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot A.$$

În cazul inelului $||GG'|| = ||OO'|| = R$, iar $A = \pi r^2$, $V = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R$, se obține același rezultat.

5. Un inel are secțiunea o elipsă (fig. 62). Să se determine masa unui astfel de inel, știind că are dimensiunile $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $R = 40$ cm și este confecționat din alamă ($\gamma = 8,5$ kg/dm³).

Soluție. Ecuația elipsei cu centrul în $O'(0, R)$ și cu semiaxele a, b , este :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - R)^2}{b^2} = 1.$$

Dacă notăm cu y_1 și y_2 ecuațiile celor două arce de elipsă ABA' și $AB'A'$, se obține :

$$y_1 = R + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y_2 = R - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$V = V_1 - V_2 = 2\pi \int_0^a (y_1^2 - y_2^2) dx =$$

$$= \frac{8\pi Rb}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 abR$$

iar masa inelului $G = 2\pi^2 abR\gamma \approx 322$ kg.

¹ Suprafața generată de un cerc care se rotește în jurul unei axe situate în planul lui, dar care nu-l intersectează se numește tor.

² Guldin Paul (1577–1643), matematician francez.

Observație. Dacă folosim teorema lui Guldin, volumul se obține direct cu ajutorul formulei:

$$V = L_c \cdot s,$$

unde

$$L_c = 2\pi R,$$

iar $s = \pi ab$ (aria elipsei de semiaxe a , b).

Se obține:

$$V = 2\pi R \cdot \pi ab = 2\pi^2 abR \approx 19,739 abR.$$

6. Să se determine masa unui inel (fig. 63) a cărui secțiune este o elipsă de semiaxe $a = 2$ cm, $b = 4$ cm, știind că raza $R = 20$ cm și este confecționat din aluminiu ($\gamma = 2,5$ kg/dm³).

R. Se va folosi procedeul de la problema 5; se va găsi $G = 7,895$ kg.

Volumul butoaielor

1. Vase cu formă parabolică. Dacă doaga AA' are forma unui arc de parabolă, o jumătate din vas va avea forma unui trunchi de paraboloid cu razele: $||AA'|| = r$, $||BE|| = R$, iar distanța dintre baze $||DE|| = h/2$ (fig. 64).

Soluție. Pentru a obține volumul unui trunchi de paraboloid de rotație, vom scrie ecuația parabolei care trece prin punctele $A(0, r)$ și $B(l, R)$. Pornind de la ecuația parabolei scrisă sub forma $y^2 = 2px + c$, se determină constantele p și c , punând condiția ca, coordonatele lui A și B să verifice ecuația acestei parabole (fig. 65).

Rezolvând sistemul: $r^2 = c$; $R^2 = 2p + c$; găsim:

$$c = r^2; 2p = (R^2 - r^2) : l,$$

și deci ecuația parabolei va fi:

$$y^2 = (R^2 - r^2) x : l + r^2.$$

Folosind formula care dă volumul de rotație determinat de ecuația parabolei găsim:

$$V_1 = \pi \int_0^l y^2 dx = \pi \int_0^l [(R^2 - r^2) x : l + r^2] \cdot dx = \frac{\pi l}{2} (R^2 + r^2).$$

$$||AD|| = r; ||BE|| = R; ||DE|| = h/2$$

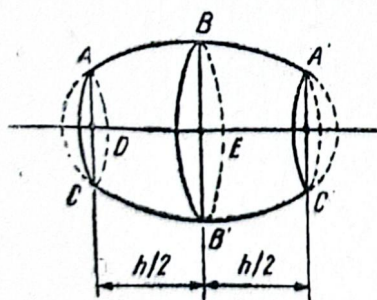


Fig. 64.

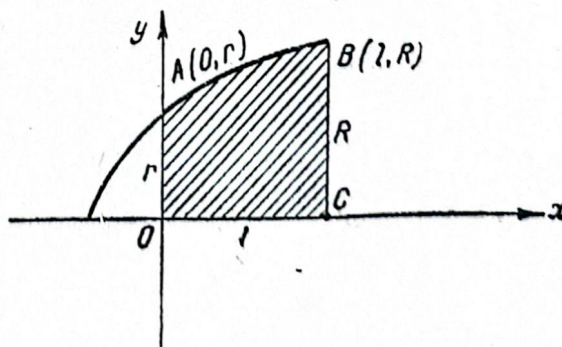


Fig. 65.

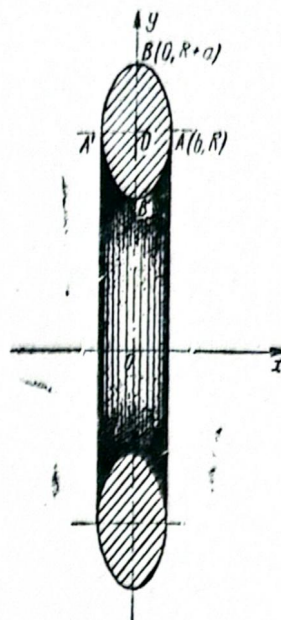


Fig. 63.

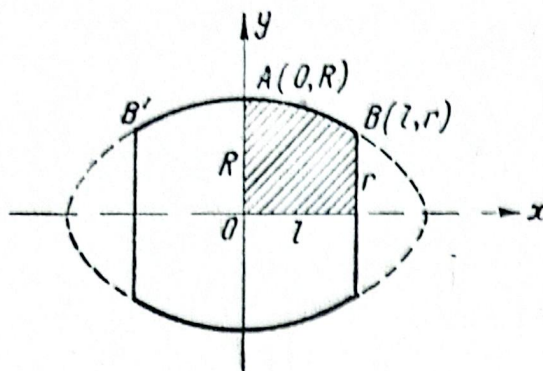


Fig. 66.

Cum $R = D : 2$, $r = d : 2$ și $l = h : 2$, volumul butoiului va fi

$$V = 2V_1 = \frac{\pi}{8} (D^2 + d^2)h.$$

2. Vase de formă elipsoidală. Se consideră vasul compus din două trunchiuri de elipsoid de rotație cu bazele lipite. În acest caz, doagele sînt arce de elipsă. Trunchiul de elipsoid se obține prin rotirea arcului de

elipsă AB în jurul axei mari a elipsei (fig. 66).

Pentru a calcula volumul, se determină mai întâi ecuația elipsei raportată la axele sale și care trece prin punctele $A(0, R)$ și $B(l, r)$ și se obține rezolvînd sistemul :

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1; \frac{R^2}{b^2} = 1; a^2 = \frac{l^2 R^2}{R^2 - r^2}; b^2 = R^2.$$

Ecuația elipsei va fi :

$$\frac{x^2(R^2 - r^2)}{l^2 \cdot R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1; y^2 = R^2 - \frac{(R^2 - r^2)}{l^2} \cdot x^2.$$

Folosind formula care dă volumul de rotație găsim :

$$V = \pi \int_0^l y^2 dx = \frac{\pi l}{3} (2R^2 + r^2) = \frac{\pi h}{12} (2D^2 + d^2).$$

3. Vase cu formă circulară. Doagele sînt formate din arce de cerc de rază egală cu lungimea butoiului. Corzile acestor arce sînt laturile unui hexagon înscris în cercul de rază D (fig. 67).

În aceste condiții $h = d$, iar d se poate exprima în funcție de D . Din figură se constată că :

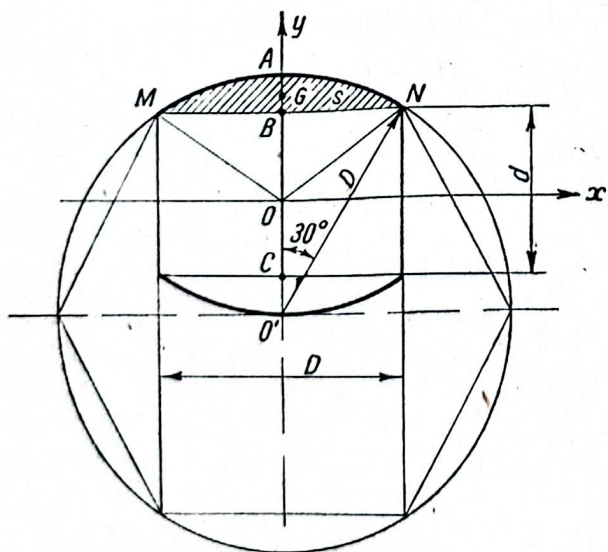


Fig. 67.

$$\begin{aligned} d &= ||BC|| = ||O'A|| - \\ &- 2 ||AB|| = ||O'A|| - \\ &- 2 (||O'A|| - ||O'B||) = \\ &= 2 ||O'B|| - ||O'A|| = \\ &= 2 \cdot \frac{D\sqrt{3}}{2} - D = D(\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

Aria (s) a suprafeței segmentului circular hașurat este

a șasea parte din diferența dintre aria cercului și a exagonului regulat înscris în acest cerc. Rezultă:

$$s = \frac{1}{6} \left(\pi D^2 - 6 \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} D \right) = \\ = \frac{1}{12} (2\pi - 3\sqrt{3}) D^2.$$

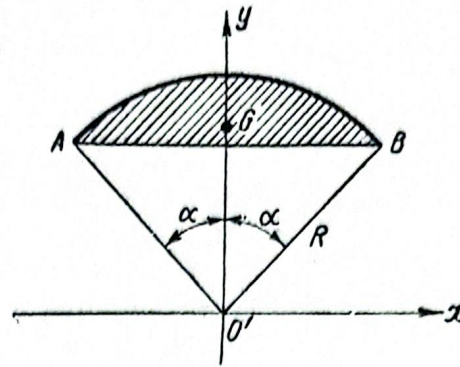


Fig. 68.

Dacă notăm cu V_1 volumul obținut din rotația segmentului circular de arie s în jurul axei Ox , teorema lui Guldin ne permite să scriem:

$$V_1 = 2\pi ||OG|| s.$$

Cum ordonata centrului de greutate al unui segment circular este dată de formula¹:

$$||O'G|| = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)},$$

pentru $R = D$ și $\alpha = \pi/6$ din figurile 67 și 68 se obține:

$$||O'G|| = \frac{4D \sin^2 \frac{\pi}{6}}{3 \left(2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \right)} = \frac{D}{2\pi - 3\sqrt{3}}.$$

Cum

$$||OG|| = ||O'G|| - ||OO'|| = \frac{D}{2\pi - 3\sqrt{3}} - \frac{D}{2} = \\ = \frac{D(2 - 2\pi + 3\sqrt{3})}{2(2\pi - 3\sqrt{3})},$$

$$V_1 = 2\pi \cdot s \cdot ||OG|| = \frac{\pi D^3}{12} (2 - 2\pi + 3\sqrt{3}).$$

La acest volum trebuie să adăugăm volumul cilindrului V_2 cu înălțimea D , ale cărui baze (fundurile butoiului) au diametrul $d = (\sqrt{3} - 1) D$:

$$V_2 = \frac{\pi}{4} (\sqrt{3} - 1)^2 \cdot D^3 = \frac{\pi}{2} (2 - \sqrt{3}) D^3.$$

Volumul butoiului va fi:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi D^3}{12} (14 - 2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0,66 D^3.$$

¹ Dedusă la § 5. Determinarea centrelor de greutate.

Observație. Volumul (V) al butoiului din figura 67 se poate obține prin rotirea mulțimii determinată de arcul MAN , dreptele $x = a$, $x = D/2$, în jurul axei Ox . Ecuația cercului cu centrul $O' \left(0, -\frac{D}{2}\right)$ și de rază D , din care face parte arcul MAN este $x^2 + (y + D/2)^2 = D^2$. Se deduce:

$$y^2 = \frac{5}{4} D^2 - x^2 - D \sqrt{D^2 - x^2}.$$

$$V = 2\pi \int_0^{D/2} y^2(x) dx = 2\pi \int_0^{D/2} \left[\frac{5}{4} D^2 - x^2 - D \sqrt{D^2 - x^2} \right] dx.$$

$$V = \frac{\pi D^3}{12} (14 - 2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0,66 D^3.$$

Rezultatul obținut este același. Metoda folosită necesită calculul unor integrale simple, în schimb nu mai este necesară cunoașterea teoremei lui Guldin și nici determinarea coordonatelor centrului de greutate.

Probleme propuse

1. Se cere volumul unui butoi, știind că doaga ABA' (fig. 64) este formată din două arce de hiperbolă racordate în B .

R. Se va scrie ecuația hiperbolei care trece prin punctele $A(0, r)$ și $B(l, r)$.

2. Să se calculeze volumul unui butoi, știind că doagele au forma unui arc de sinusoidă generalizată ($y = a \sin x$), iar lungimea butoiului este $2\pi/3$ (fig. 69).

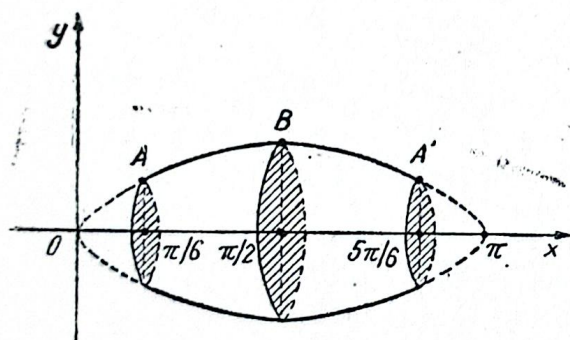


Fig. 69.

$$\begin{aligned} R. \quad V &= 2\pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} y^2 dx = \\ &= 2\pi a^2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^2 x dx; \\ \alpha_1 &= \pi/6, \quad \alpha_2 = \pi/2. \end{aligned}$$

Se va găsi:

$$V = \pi a^2 (4\pi + 3\sqrt{3}) : 12.$$

3. Se cere capacitatea unei pîlnii generată prin rotirea mulțimii determinată de graficul funcției $y = x \ln x$; $x \in (0, +\infty)$, dreptele $x = 1$, $x = e$, în jurul axei Ox .

$$V = \pi \int_1^e x^2 \cdot \ln^2 x dx = \frac{\pi}{3} \left| x^3 \left(\ln^2 x - \frac{2}{3} \ln x + \frac{2}{9} \right) \right|_1^e = \frac{\pi}{27} (5e^3 - 2).$$

Observație. Volumul (V_1) al corpului generat prin rotirea mulțimii determinată de graficul funcției în jurul axei Ox , și dreptele $x = 0$, $x = 1$, este:

$$V_1 = \pi \int_0^1 x^2 \cdot \ln^2 x \, dx = \frac{\pi}{3} \left| x^3 \left(\ln^2 x - \frac{2}{3} \ln x + \frac{2}{9} \right) \right|_0^1 = \frac{2\pi}{27},$$

deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cdot \ln^2 x = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cdot \ln x = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (-x^3 : 3) = 0$.

§ 3. Lungimea graficului unei funcții

Dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și derivabilă cu derivata continuă, atunci lungimea graficului acestei funcții este:

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

Exemple

1. Să se determine lungimea unui cablu metalic suspendat în două puncte fixe A , B situate la aceeași înălțime față de sol, știind că $||OA'|| = ||OB'|| = c$, $||OM|| = a$ (fig. 70).

Soluție. Cablul suspendat în punctele A și B va avea forma unui „lânțisor” a cărei ecuație este:

$$f(x) = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (e^{x/a} - e^{-x/a}),$$

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}).$$

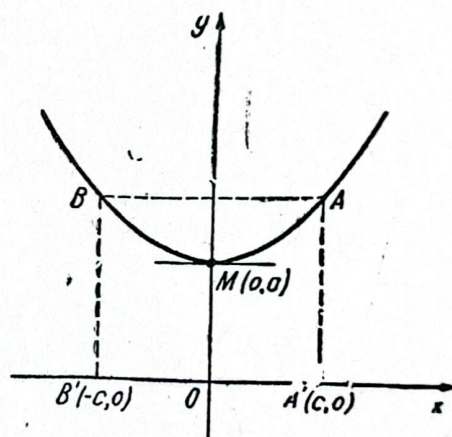


Fig. 70.

$$L = \int_0^c (e^{x/a} + e^{-x/a}) \, dx = a \left| e^{x/a} - e^{-x/a} \right|_0^c = a (e^{c/a} - e^{-c/a}).$$

În cazul particular $a = c = 1$ m. $L = e - e^{-1} \approx 2,718 - 0,367 = 2,351$.

2. Se cere lungimea arcului de curbă a cărui grafic este definit de ecuația $y = (1 + \sqrt{1 + 8x}) : 4$, cuprinsă între punctele $A(0, 1/2)$, $B(1, 1)$.

Soluție. Cum $y' = 1 : \sqrt{1 + 8x}$; $L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{1 + 8x}} \, dx$. Schimbarea

de variabilă prin funcția $\varphi: [1,9] \rightarrow [0,1]$, unde $\varphi(t) = (t-1):8$, ne conduce la integrala:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{8} \int_1^9 \frac{t+1}{\sqrt{t^2+t}} dt = \frac{1}{16} \int_1^9 \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+t}} dt + \frac{1}{16} \int_1^9 \frac{dt}{\sqrt{t^2+t}} = \\ &= \frac{1}{8} \sqrt{t^2+t} + \frac{1}{16} \ln \left(t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t} \right) \Big|_1^9 = \frac{1}{8} (3\sqrt{10} - \sqrt{2}) + \\ &\quad + \frac{1}{16} \ln \frac{19 + 6\sqrt{10}}{3 + 2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3. Se dă funcția: $x = f(y) = a \cdot \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

Se cere lungimea graficului funcției $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Caz particular $a = e$, $b = e^3$.

Soluție. Se obține succesiv:

$$\begin{aligned} x'(y) &= -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}; \\ L &= \int_a^b \sqrt{1 + x'^2(y)} \cdot dy = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{a^2 - y^2}{y^2}} dx = \\ &= \int_a^b \frac{a}{y} dy = a \ln y \Big|_a^b = a \cdot \ln \frac{b}{a} = a (\ln b - \ln a). \end{aligned}$$

În cazul particular dat, $L = e (\ln e^3 - \ln e) = 2e$.

§ 4. Calculul ariilor suprafețelor de rotație

Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ este o funcție continuă și derivabilă, cu derivată continuă, atunci suprafața obținută prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox (fig. 71) este:

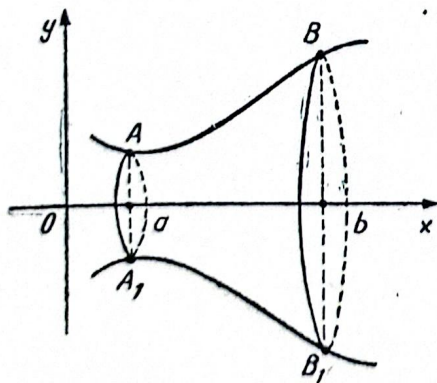


Fig. 71.

$$A_{Ox}(f) = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad (4)$$

iar dacă

$$\varphi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

este continuă și derivabilă, cu derivată continuă, atunci aria suprafeței obținută

prin rotirea graficului funcției $\varphi(y)$ în jurul axei Oy (fig. 72) este:

$$A_{Oy} = 2\pi \int_c^b \varphi(y) \cdot \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2} dy.$$

Exemple

1. Se cere aria suprafeței obținută prin rotirea elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

în jurul axei Oy . Corpul astfel obținut (fig. 73) este un elipsoid de rotație (poartă și numele de SFEROID).

Soluție. Explicînd ecuația elipsei în raport cu variabila y se obține:

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}; \quad x' = \frac{-ay}{b\sqrt{b^2 - y^2}};$$

$$\sqrt{1 + x'^2} = \sqrt{\frac{b^4 + y^2(a^2 - b^2)}{b^2(b^2 - y^2)}}.$$

$$A = 2\pi \int_{-b}^b x \sqrt{1 + x'^2} dy = \frac{2\pi a}{b^2} \int_{-b}^b \sqrt{b^4 + c^2 y^2} dy; \text{ unde } c^2 = a^2 - b^2.$$

$$A = \frac{\pi a}{b^2} \left| y \sqrt{b^4 + c^2 y^2} + \frac{b^4}{c} \cdot \ln (cy + \sqrt{b^4 + c^2 y^2}) \right|_{-b}^{+b}.$$

$$A = 2\pi a \left(a + \frac{b^2}{2c} \ln \frac{a+c}{a-c} \right).$$

Observație. Dacă $b = a$; $c^2 = a^2 - a^2 = 0$.

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{b^2}{2c} \ln \left(\frac{a+c}{a-c} \right) = \frac{b^2}{2} \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{a+c}{a-c} \right)}{c} = \frac{b^2}{2} \cdot 0$$

$$\cdot \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{a+c}{a-c} \right)}{\left(\frac{a+c}{a-c} \right)} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{2a}{a^2 - c^2} = \frac{2}{a}.$$

$$A = 2\pi a \left(a + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{a} \right) = 2\pi a (a + a) = 4\pi a^2.$$

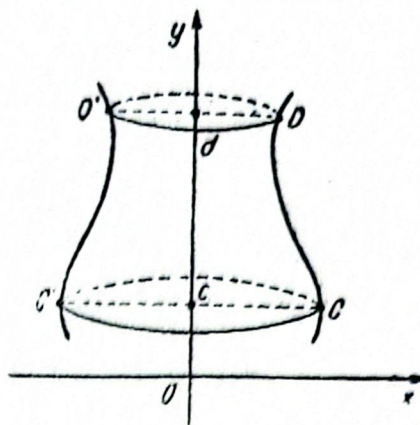


Fig. 72.

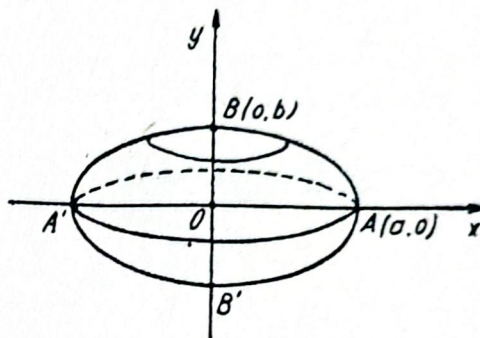


Fig. 73.

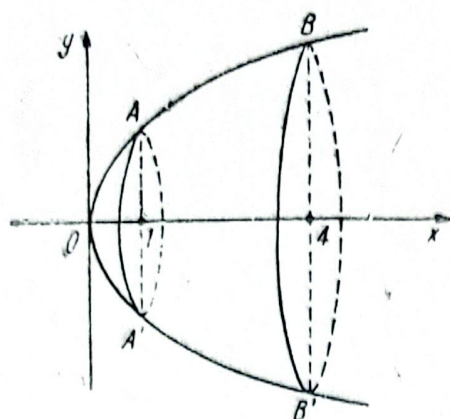


Fig. 74.

2. Să se afle aria oglinzii parabolice obținută prin rotirea parabolei $4y^2 = 9x$; $x \in [0, 1]$, în jurul axei Ox (fig. 74).

Soluție. Se obține succesiv:

$$y = \frac{3}{2} \sqrt{x};$$

$$y' = \frac{3}{4\sqrt{x}};$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{16 \cdot x}}.$$

$$A = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{3\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{16x + 9} dx.$$

Schimbarea de variabilă prin funcția $\varphi: [3, 5] \rightarrow [0, 1]$, unde $\varphi(t) = (t^2 - 9) / 16$, ne conduce la:

$$A = \frac{3\pi}{32} \int_3^5 t^2 dt = \frac{\pi}{32} \left| t^3 \right|_3^5 = \frac{49}{16} \pi.$$

3. Se cere aria suprafeței obținută prin rotirea „astroidei” în jurul axei ox (fig. 75).

Soluție. Explicînd ecuația „astroidei”:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2},$$

în funcție de x se obține:

$$y = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^{3/2};$$

$$y' = \frac{(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^{1/2}}{\sqrt[3]{x}};$$

$$y'^2 = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}};$$

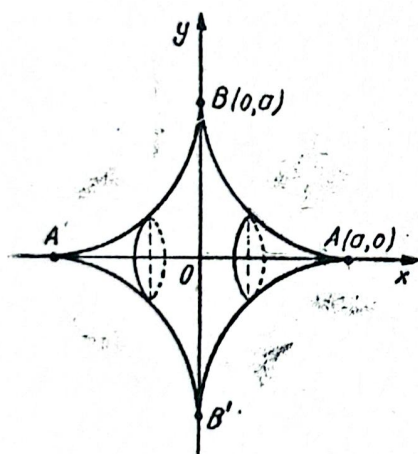


Fig. 75.

$$y \cdot \sqrt{1 + y'^2} = (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2})^{3/2} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{x}} = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}.$$

$$A = 4\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx.$$

Schimbarea de variabilă prin

$$\varphi: [a^{2/3}, 0] \rightarrow [0, a],$$

unde $\varphi(t) = (a^{2/3} - t)^{3/2}$, ne conduce la :

$$A = -6\pi a^{\frac{1}{3}} \int_{a^{2/3}}^0 t^{3/2} dt = 6\pi a^{1/3} \left| t^{5/2} \right|_0^{a^{2/3}} = \frac{12}{5} \pi a^2.$$

Observație. Cum aria sferei de rază a este $A_s = 4\pi a^2$, avem relația :

$$\frac{A}{A_s} = \frac{12\pi a^2}{5 \cdot 4\pi a^2} = \frac{3}{5}; \quad A = \frac{3}{5} A_s.$$

§ 5. Determinarea centrelor de greutate

Centrul de greutate G , al unui sistem de puncte materiale este punctul de aplicație al rezultantei tuturor forțelor de atracție gravitațională care acționează asupra acelui sistem.

Determinarea centrelor de greutate ale curbelor, suprafețelor sau corpurilor prezintă în practică o importanță deosebită.

În cele ce urmează vom determina centrul de greutate al unor plăci plane și omogene.

O placă plană este omogenă, dacă masa oricărei porțiuni din ea este egală cu produsul dintre o constantă pozitivă (numită masa specifică) și aria suprafeței acelei porțiuni.

Dacă o placă plană este delimitată de graficul funcției $y=f(x)$ continuă pe intervalul $[a, b]$, de dreptele $x=a$, $x=b$ și axa Ox , coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G)$ ale acestei plăci (fig. 76) sînt :

$$x_G = \frac{1}{S} \int_a^b x f(x) dx; \quad y_G = \frac{1}{2S} \int_a^b f^2(x) dx; \quad (5)$$

unde S este aria suprafeței $ABba = \int_a^b f(x) dx$.

Dacă o placă plană este delimitată de graficele funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$ continue pe intervalul $[a, b]$ și de dreptele $x=a$, $x=b$ (fig. 77).

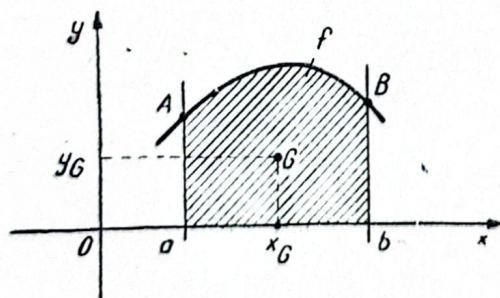


Fig. 76.

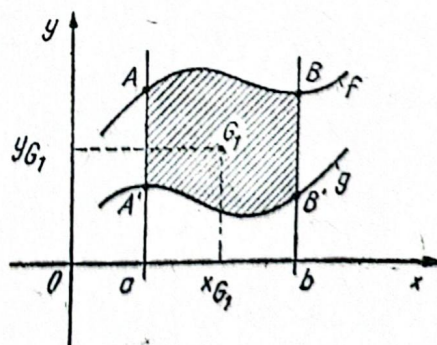


Fig. 77.

coordonatele centrului de greutate $G_1(x_{G_1}, y_{G_1})$ al acestei plăci sînt :

$$x_{G_1} = \frac{1}{S_1} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx; \quad y_{G_1} = \frac{1}{2S_1} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] \cdot dx; \quad (6)$$

unde S_1 este aria suprafeței $ABB'A' = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

Exemple

1. Centrul de greutate a unei plăci plane, mărginită de un arc de cerc, axa Ox și dreptele $x = R \sin \alpha$, $x = -R \sin \alpha$. Aria hașurată din figura. 78.

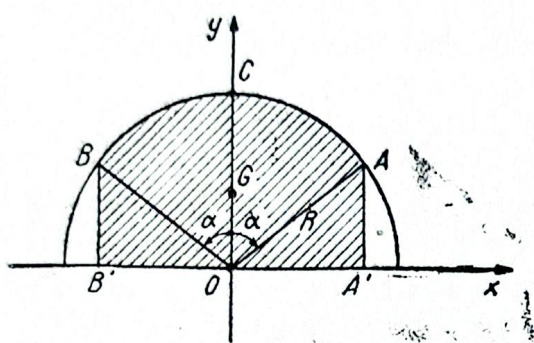


Fig. 78.

Soluție. Folosind notațiile din figură se obține :

$$x_G = 0,$$

$$y_G = \frac{1}{2S} \int_{-R \sin \alpha}^{R \sin \alpha} (R^2 - x^2) dx = \frac{I(\alpha)}{2S}$$

$$I(\alpha) = \int_{-R \sin \alpha}^{R \sin \alpha} (R^2 - x^2) dx =$$

$$= \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R \sin \alpha}^{R \sin \alpha} = \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha (3 - \sin^2 \alpha).$$

$$\text{Aria } S = \text{aria sect. } (AOB) + 2 \text{ aria } \triangle AA'O = R^2 \alpha + \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2}.$$

$$y_G = \frac{I(\alpha)}{2S} = \frac{2R \sin \alpha (3 - \sin^2 \alpha)}{3(2\alpha + \sin 2\alpha)}.$$

Cazuri particulare

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \dots, \quad y_G = \frac{11R}{6(2\pi + 3\sqrt{3})},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \dots, \quad y_G = \frac{5R\sqrt{2}}{3(\pi + 2)},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \dots, \quad y_G = \frac{9R\sqrt{3}}{2(4\pi + 3\sqrt{3})},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \dots, \quad y_G = \frac{4R}{3\pi} \text{ (centrul de greutate al unui semicerc)},$$

$\alpha = \pi, \dots, y_G = 0$ (centrul de greutate al cercului),

$\alpha = 0, \dots, y_G = \frac{R}{2}$ (centrul de greutate al razei OC).

$$y_G = \frac{2R}{3} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{3 \sin \alpha - \sin^3 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} =$$

$$= \frac{2R}{3} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{3 \cos \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{2 + 2 \cos 2\alpha} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{R}{2}.$$

În acest caz placa se reduce la segmentul de dreaptă OC , care, evident are centrul de greutate situat la mijlocul lui: $OG = R/2$.

2. Centrul de greutate al unui segment de cerc.

Din figura 79 se constată că:

$$y_G = \frac{1}{2S} \int_{-R \sin \alpha}^{R \sin \alpha} [f^2(x) - g^2(\alpha)] \cdot dx =$$

$$= \frac{I(\alpha)}{2S}.$$

$$I(\alpha) = \int_{-R \sin \alpha}^{R \sin \alpha} [(R^2 - x^2) - R^2 \cos^2 \alpha] \cdot dx = \frac{4}{3} R^3 \sin^3 \alpha.$$

$$S = R^2 \alpha - \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2} = \frac{R^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha).$$

$$y_G = \frac{I(\alpha)}{2S} = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)},$$

formulă folosită la calculul volumului butoaielor.

Cazuri particulare

$$\alpha = 0, y_G = \frac{4R}{3} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right) = \frac{4R}{3} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{2 - 2 \cos 2\alpha} \right) =$$

$$= \frac{4R}{3} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{6 \sin \alpha \cos^2 \alpha - 3 \sin^3 \alpha}{4 \sin 2\alpha} = \frac{4R}{3} \cdot \frac{6}{8} = R.$$

În acest caz placa se reduce la punctul C , deci $y_G = OC = R$.

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \dots, y_G = \frac{R}{2(\pi - 3)},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \dots, y_G = \frac{2R\sqrt{2}}{3(\pi - 2)},$$

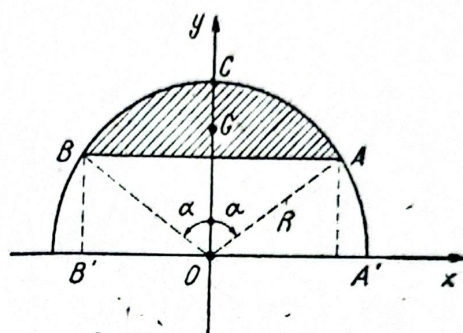


Fig. 79.

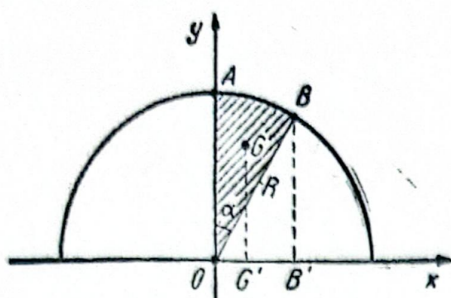


Fig. 80.

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \dots, y_G = \frac{3R\sqrt{3}}{4\pi - 3\sqrt{3}},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \dots, y_G = \frac{4R}{3\pi}.$$

3. Centrul de greutate al unei plăci plane, de forma unui sector circular de unghi α și rază R .

Folosind notațiile din figura 80, se obține

$$x_G = \frac{1}{S} \int_0^{R \sin \alpha} x(y_1 - y_2) dx = \frac{I_x}{S}.$$

$$I_x = \int_0^{R \sin \alpha} x(\sqrt{R^2 - x^2} - x \operatorname{ctg} \alpha) dx = \frac{R^3}{3} (1 - \cos^3 \alpha) - \frac{R^3}{3} \cdot \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

$$S = \frac{R^2 \alpha}{2}; \quad x_G = \frac{2R(1 - \cos \alpha)}{3\alpha}.$$

$$y_G = \frac{1}{2S} \int_0^{R \sin \alpha} (y_1^2 - y_2^2) dy = \frac{1}{2S} \int_0^{R \sin \alpha} (R^2 - x^2 - x^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha) dx = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}.$$

Cazuri particulare

$$\alpha = 0, \dots, x_G = \frac{2R}{3} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha} = \frac{2R}{3} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{1} = 0,$$

$$y_G = \frac{2R}{3} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2R}{3}.$$

Centrul de greutate se află pe axa Oy situat la distanța $OG = \frac{2}{3} R$.

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \dots, x_G = \frac{2R}{\pi} (2 - \sqrt{3}), \quad y_G = \frac{2R}{\pi},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \dots, x_G = \frac{4R}{3\pi} (2 - \sqrt{2}), \quad y_G = \frac{4R}{3\pi} \sqrt{2},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \dots, x_G = \frac{R}{\pi}, \quad y_G = \frac{R}{\pi} \sqrt{3},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \dots, x_G = \frac{4R}{3\pi}, \quad y_G = \frac{4R}{3\pi},$$

$$\alpha = \pi, \dots, x_G = \frac{4R}{3\pi}, \quad y_G = 0,$$

$$\alpha = 2\pi, \dots, x_G = 0, \quad y_G = 0.$$

4. Centrul de greutate al unei plăci plane mărginite de cercul $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ și parabola $y^2 = ax$, situată deasupra axei Ox ($x \geq 0, y \geq 0$).

Construind graficul celor două curbe, se constată că cercul C și parabola P se taie în punctele $O(0, 0)$ și $A(a, a)$.

Folosind datele din figura 81 se obține :

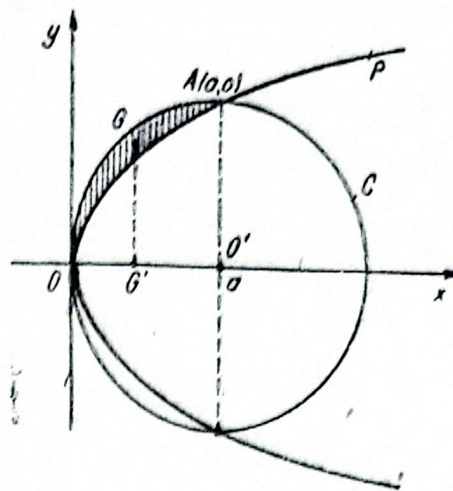


Fig. 81.

$$x_G = \frac{\int_0^a x(y_1 - y_2) dx}{\int_0^a (y_1 - y_2) dx} =$$

$$= \frac{\int_0^a x(\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax}) dx}{\int_0^a (\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax}) dx} = \frac{15\pi - 44}{15\pi - 40} a \approx 0,43a.$$

$$y_G = \frac{\int_0^a (y_1^2 - y_2^2) dx}{2 \int_0^a (y_1 - y_2) dx} = \frac{\int_0^a (ax - x^2) dx}{2 \int_0^a (\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax}) dx} = \frac{a}{3\pi - 8} \approx 0,52a.$$

Probleme propuse

1. Să se determine centrul de greutate al unei jumătăți de elipsă, a cărei ecuație este: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; $x \in [-a, a]$; $y \in [0, b]$.

R. $x_G = 0$; $y_G = 4b/3\pi$ (fig. 82).

2. Centrul de greutate al unei plăci plane mărginite de elipsa: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $x \in [0, a]$; $y \in [0, b]$;

R. $x_G = \frac{4a}{3\pi}$, $y_G = \frac{4b}{3\pi}$ (fig. 83).

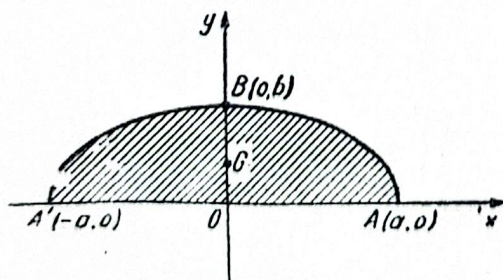


Fig. 82.

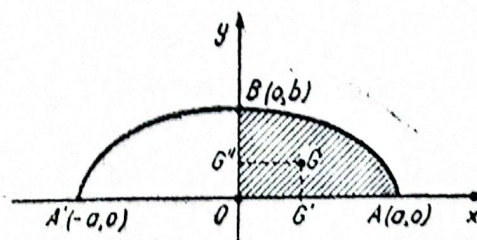


Fig. 83.

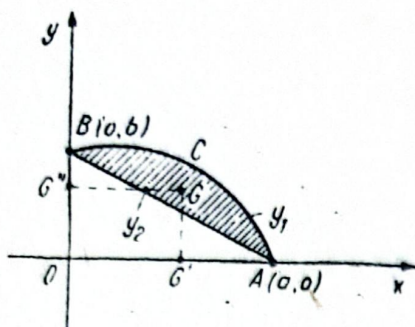


Fig. 84.

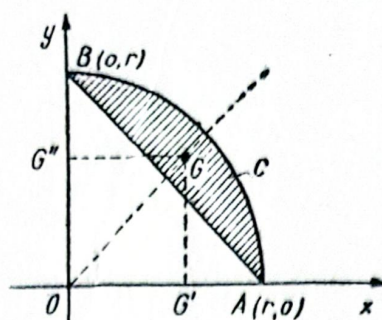


Fig. 85.

3. Se cere centrul de greutate al unei plăci de forma unui segment de elipsă, determinat de coarda ce unește vîrfurile $A(a, 0)$, $B(0, b)$, adică segmentul de elipsă ACB (fig. 84).

R. Din ecuația elipsei $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ și a dreptei $AB: x/a + y/b = 1$ se deduce:

$$y_1(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}; \quad y_2(x) = \frac{b}{a} (a - x).$$

Se va găsi:

$$x_G = 2a : 3(\pi - 2); \quad y_G = 2b : 3(\pi - 2).$$

Caz particular: $a = b = r$, elipsa devine cerc, coordonatele centrului de greutate al segmentului de cerc ACB (fig. 85) sînt: $x_G = y_G = 2r : 3(\pi - 2)$.

4. Centrul de greutate al unei plăci plane mărginită de sinusoida: $y = a \sin(x/a)$, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = a\pi$, $a > 0$ (fig. 86).

$$R. \quad x_G = \frac{1}{S} \int_0^{a\pi} x \sin \frac{x}{a} dx; \quad y_G = \frac{a}{2S} \int_0^{a\pi} \sin^2 \frac{x}{a} dx; \quad S = 2a.$$

Se va găsi:

$$x_G = a\pi : 2;$$

$$y_G = a\pi : 8.$$

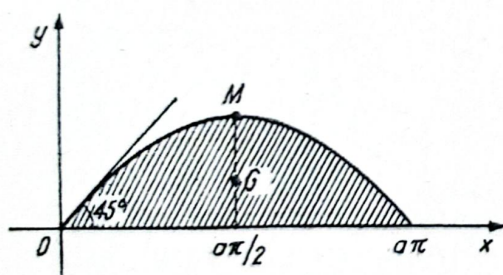


Fig. 86.

Caz particular $a = 1$, $G\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

Observații: — Formulele (5) și (6) permit determinarea centrelor de greutate numai pentru plăcile plane și

omogene, delimitate de graficul unor funcții continue pe un interval dat $[a, b]$.

— Pentru a obține aria suprafețelor precum și volumul corpurilor de rotație se pot folosi și teoremele lui Guldin care se enunță astfel:

Prima teoremă a lui Guldin. Aria (A) a suprafeței de rotație, generată prin rotirea unei curbe plane în jurul unei axe din același plan, care nu taie curba, este egală cu produsul dintre lungimea (L) a acelei curbe și

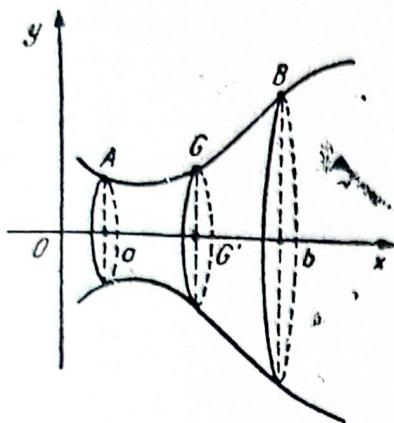


Fig. 87.

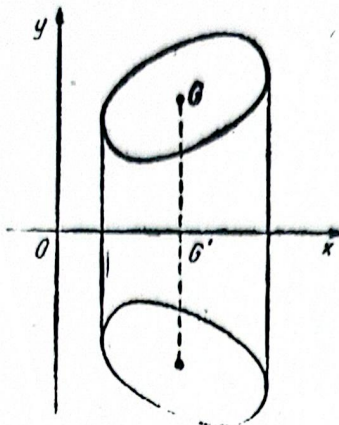


Fig. 88.

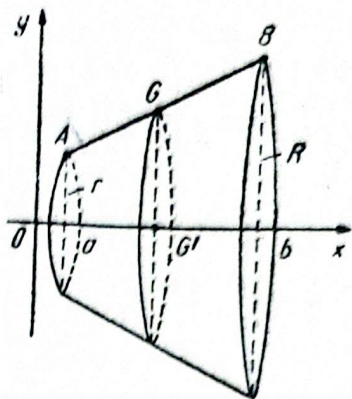


Fig. 89.

lungimea cercului descris de centrul de greutate al curbei în jurul acelei axe: $A = 2\pi ||GG'|| \cdot L$ (fig. 87).

Cazuri particulare:

— Dacă curba plană este închisă și notăm cu P perimetrul ei, $A = 2\pi ||GG'|| \cdot P$ (fig. 88).

— Dacă curba este un cerc, corpul obținut se numește tor, aria lui va fi: $A = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr$ (unde R este raza torului, iar r este raza cercului).

— Dacă curba se reduce la un segment de dreaptă $|AB|$ (fig. 89), atunci ea descrie un trunchi de con a cărui arie laterală este: $A = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot ||AB|| = \pi g(R + r)$, deoarece $||AB|| = g$ este generatoarea trunchiului de con, iar $||GG'|| = (R + r) : 2$ este linie mijlocie în trapezul $AabB$.

— Dacă $|AB| \parallel Ox$, segmentul $|AB|$ va descrie un cilindru a cărui arie laterală $A = 2\pi ||OG'|| \cdot ||AB|| = 2\pi rg$.

Formula $A = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot L$ conține 3 elemente:

- Lungimea (L) a arcului (sau perimetrul P al figurii) care se rotește.
- Aria (A) a suprafeței de rotație generată de arcul L .
- Distanța $||GG'||$ de la centrul de greutate la axa de rotație.

Dacă două din aceste elemente sînt cunoscute, al treilea se poate obține:

$$A = 2\pi ||GG'|| \cdot L; ||GG'|| = A : 2\pi L; L = A : 2\pi ||GG'||.$$

Exemple

1. Centrul de greutate al unui semicerc cu centrul în origine și de rază R .

Soluție. $A = 4\pi R^2$ (suprafața sferei),
 $L = \pi R$ (lungimea unui semicerc).

$$\begin{aligned} ||GG'|| &= A : 2\pi L = \\ &= 4\pi R^2 : (2\pi \cdot \pi R) = 2R : \pi. \end{aligned}$$

2. Se cere aria generată de pătratul $ABCD$ de latură a , prin rotirea lui în jurul axei xx' , ce trece prin vârful A și face cu latura $|AB|$ un unghi α . (fig. 90).

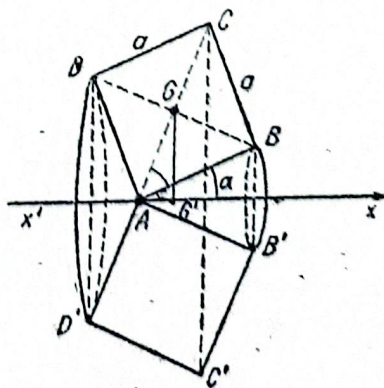


Fig. 90.

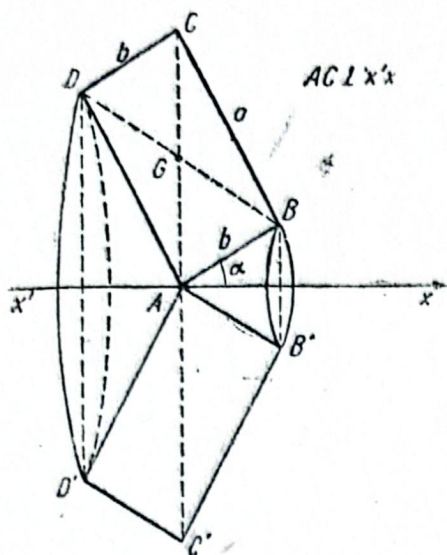


Fig. 91.

Soluție. Din $\triangle AGG'$ se deduce:

$$\begin{aligned} ||GG'|| &= ||AG|| \sin(\alpha + 45^\circ) = \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin(\alpha + 45^\circ) = \frac{a}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha). \end{aligned}$$

Se obține

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot P = \\ &= 2\pi \cdot \frac{a}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot 4a = \\ &= 4\pi a^2 (\sin \alpha + \cos \alpha). \end{aligned}$$

3. Se cere aria generată prin rotirea în jurul axei $x' - x$ a dreptunghiului $ABCD$ având laturile a, b și diagonala $d = |AC| \perp xx'$ știind că latura $|AB|$ face cu axa xx' un unghi α (fig. 91).

Soluție. Se constată că $||AG|| = ||AC|| : 2 = d : 2$, $a = d \cdot \cos \alpha$; $b = d \cdot \sin \alpha$, $A = 2\pi ||AG|| \cdot P = 2\pi \cdot \frac{d}{2} (2a + 2b) = 2\pi d^2 (\sin \alpha + \cos \alpha)$.

A doua teoremă a lui Guldin. Volumul (V) al corpului generat de o suprafață plană prin rotirea ei în jurul unei axe din același plan, pe care nu o taie, este egal cu produsul dintre aria (S) a acelei suprafețe și lungimea cercului descris de centrul de greutate al suprafeței în jurul axei: $V = 2\pi ||GG'|| \cdot S$.

În particular, dacă aria S este limitată de trapezul curbiliniu $AA'B'B$, mărginit de curba $y = f(x)$ continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$, de dreptele $x = a$, $x = b$ și axa Ox (fig. 92) atunci: $V = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot A$ ($A =$ aria $AA'B'B$, G' proiecția centrului de greutate G pe axa Ox).

— Dacă aria este limitată de trapezul rectiliniu $ABB'A'$ se va obține un trunchi de con (fig. 93).

$$V = 2\pi \cdot ||GG'|| \cdot S; \quad ||GG'|| = V : 2\pi \cdot S = (R^3 - r^3) : 3(R^2 - r^2).$$

— Dacă două din elementele V , $||GG'||$, A sînt cunoscute, teorema a doua a lui Guldin ne permite să calculăm pe cel de al treilea: $V = 2\pi ||GG'|| \cdot S$; $||GG'|| = V : 2\pi S$; $S = V : 2\pi ||GG'||$.

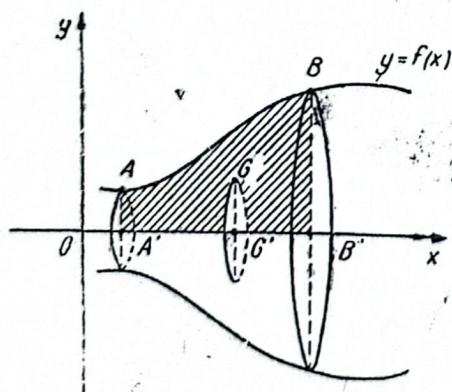


Fig. 92.

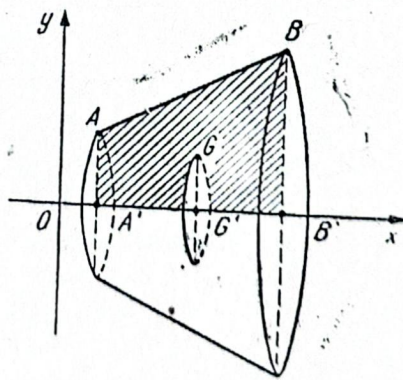


Fig. 93.

Exemple

1. Să se determine centrul de greutate al unei plăci semicirculare cu centrul în originea O a axelor de coordonate și de rază r , avînd diametrul situat pe axa Ox .

Soluție. Cum $V = 4\pi R^3 : 3$, $A = \pi R^2 : 2$, se obține :

$$GG' = \frac{V}{2\pi S} = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{2}{2\pi \cdot \pi R^2} = \frac{4R}{3\pi},$$

același rezultat obținut pe o cale mult mai laborioasă, folosind calculul integral (formulele (5)).

2. Se cere volumul corpului obținut prin rotirea pătratului $ABCD$ în jurul dreptei $x'x$ ce trece prin vîrfurile A și face un unghi α cu latura $|AB|$ (fig. 90).

Soluție. Cum $||GG'|| = \frac{a}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$ și $S = a^2$, rezultă :

$$V = 2\pi ||GG'|| \cdot S = 2\pi \frac{a}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) a^2 = \pi a^3 (\sin \alpha + \cos \alpha).$$

3. Se cere volumul V al corpului obținut prin rotirea dreptunghiului $ABCD$ în jurul dreptei $x'x$, știind că : $||BC|| = ||AD|| = a$, $||AB|| = ||CD|| = b$, diagonala $||AC|| = d \perp x'x$, iar latura $|AB|$ face cu axa de rotație $x'x$ un unghi α (fig. 91).

Soluție. Avem : $||AG|| = d : 2$; $a = d \cos \alpha$; $b = a \sin \alpha$; $S = ab = d^2 \sin \alpha \cos \alpha$.

$$\text{Rezultă : } V = 2\pi ||AG|| \cdot S = 2\pi \cdot \frac{d}{2} \cdot d^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha = \pi d^3 \sin \alpha \cos \alpha.$$

4. Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului dreptunghic ABC în jurul bisectoarei exterioare a unghiului A ($\hat{A} = 90^\circ$, $||BC|| = a$, $||AB|| = c$, $||AC|| = b$; $\hat{C} = \alpha$), în funcție de a și α (fig. 94).

Soluție. Se constată că $||MA|| = ||MC|| = a : 2$; $||AG|| = \frac{2}{3} ||AM|| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}$; $||GG'|| = ||AG|| \sin (\alpha + 45^\circ) = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{a\sqrt{2}}{6} (\sin \alpha + \cos \alpha)$; aria $\triangle ABC = S = \frac{bc}{2} = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2}{4} \sin 2\alpha$.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi ||GG'|| \cdot S = \\ 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{6} (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot \frac{a^2}{4} \sin 2\alpha &= \\ = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12} \sin 2\alpha (\sin \alpha + \cos \alpha). \end{aligned}$$

5. Se cere volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului ABC în jurul axei $|BF| \perp |BC|$,

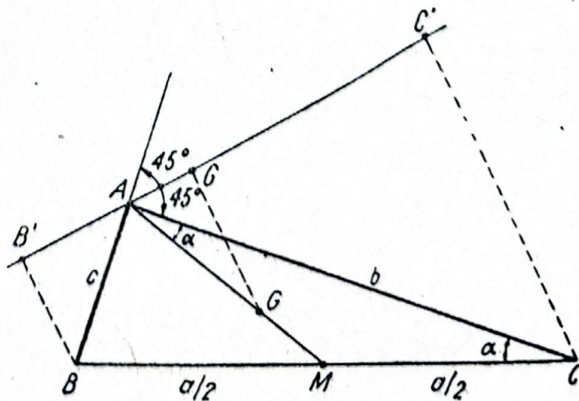


Fig. 94.

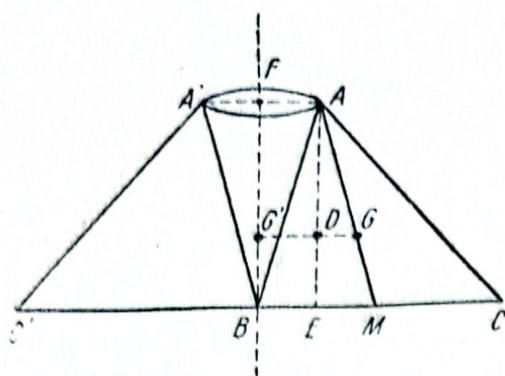


Fig. 95.

știind că $||AB|| = 13$, $||BC|| = 14$
 $||AC|| = 15$ (fig. 95).

Soluție. Se calculează aria S a
 triunghiului ABC cunoscând laturile
 $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84,$$

apoi

$$||AE|| = \frac{2S}{||BC||} = 12.$$

Din $\triangle ABE$ se obține

$$||BE|| = ||AF|| = \sqrt{||AB||^2 - ||AE||^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Pentru a determina pe $||GG'||$ se consideră sistemul de axe format
 din $|BC|$ (axă Ox) și $|BF| \perp |BC|$ (axă Oy). Abscisa punctului G va fi:

$$||GG'|| = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \frac{1}{3}(|AF| + 0 + |BC|) = \\ = \frac{1}{3}(5 + 14) = \frac{19}{3}.$$

$$\text{Rezultă: } V = 2\pi ||GG'|| S = 2\pi \frac{19}{3} \cdot 84 = 1064\pi.$$

Observație. Cum $||GG'|| = ||G'D|| + ||DG||$, iar $||DG|| =$
 $= \frac{2}{3} ||EM|| = \frac{2}{3} (||BM|| - ||BE||) = \frac{2}{3} (7 - 5) = \frac{4}{3}$, găsim $||GG'|| =$
 $= ||G'D|| + ||DG|| = 5 + \frac{4}{3} = \frac{19}{3}$ (fără cunoștințe de geometrie anali-
 tică).

Concluzie. Suprafețele și volumele de rotație se pot obține:

- folosind calculul integral;
- cu ajutorul celor două teoreme ale lui Guldin;
- folosind noțiuni de geometrie elementară (suprafețele și volumele
 corpurilor de rotație).

CAPITOLUL VII.

APLICAȚII DIVERSE

§ 1. O problemă de croială

În tinichigerie se pune în mod curent problema de a se confecționa din tablă un burlan prevăzut cu un cot (fig. 96).

Unghiul format de cele două axe ale cotului este de cele mai multe ori de 90° , dar uneori poate fi de 30° , 45° , 60° , 120° .

Astfel de probleme se pun și în croitorie, atunci când se face croiala unei mîneci în partea în care se unește cu umărul și în construcția țevelor de apă sau de gaze, atunci când trebuie să construim o racordare (un cot sau un teu).

Se știe că astfel de croieli se fac cu ajutorul unui șablon dinainte construit. Dar cum se realizează un astfel de șablon?

Vom arăta că el se construiește cu ajutorul unei sinusoide simple, sau a unei sinusoide generalizate $y = a \sin x$ (a fiind o constantă cunoscută).

În acest scop se face o secțiune într-un cilindru circular drept cu un plan care face cu planul bazei un unghi α (fig. 97), apoi se desfășoară pe un plan suprafața laterală a cilindrului.

Secțiunea circulară $APBK$ se va desfășura după dreapta $ADBKC$, iar secțiunea $AMNBN'$ (care este o elipsă) se va desfășura după curba

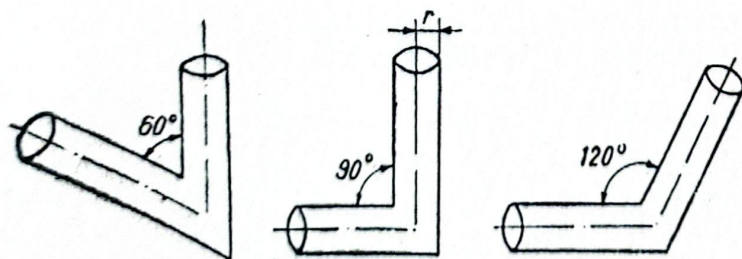


Fig. 96.

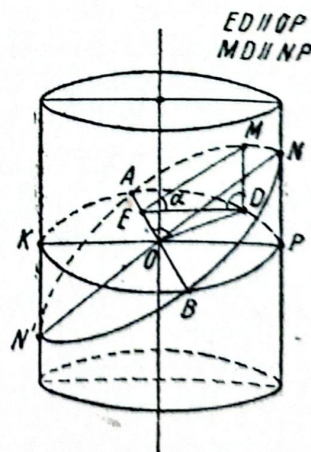


Fig. 97.

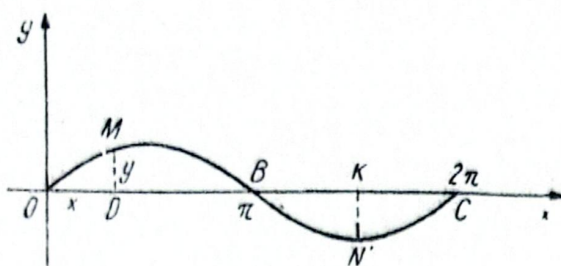


Fig. 98.

$AMBN'C$ (fig. 98) care este o sinusoidă generalizată.

Într-adevăr, dacă notăm :

$$\widehat{AD} = x,$$

$$\|DM\| = y,$$

$$\|NP\| = h,$$

$$\|OP\| = r,$$

$$\text{din } \triangle EOD \rightarrow \|ED\| = r \sin x;$$

$$\text{din } \triangle EDM \rightarrow y = \|DM\| = \|ED\| \operatorname{tg} \alpha = r \sin x \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\|MD\|}{\|ED\|} = \frac{\|NP\|}{\|OP\|} = \frac{h}{r};$$

se obține : $y = r \operatorname{tg} \alpha \sin x = r \frac{h}{r} \sin x = h \sin x$ (c.c.t.d.).

Deci, desfășurata unei secțiuni oblice a unui cilindru circular drept pe un plan este o sinusoidă generalizată :

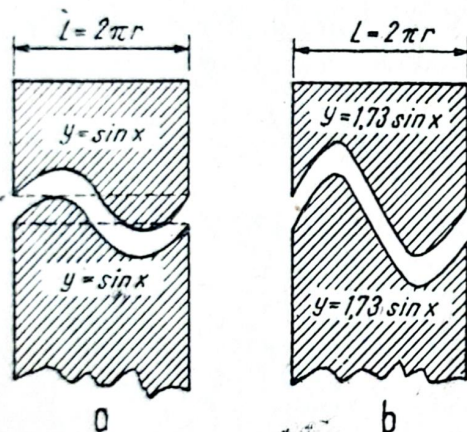


Fig. 99.

$$y = h \sin x,$$

unde

$$h = r \operatorname{tg} \alpha.$$

Dacă cele două părți ale cotului fac între ele un unghi de 90° , atunci

$$\alpha = 45^\circ, \operatorname{tg} \alpha = 1$$

și deci

$$h = r.$$

Dacă vom considera $r = 1$, se obține sinusoida simplă $y = \sin x$ (fig. 99 a).

Construcția sinusoidelor se face prin puncte pe o foaie de carton, apoi după ea se realizează un șablon din tablă, care va servi ori de câte ori avem nevoie să construim astfel de coturi.

Dacă cele două coturi fac între ele un unghi de 60° , atunci $h = r \operatorname{tg} 60^\circ = r \sqrt{3} \approx 1,73 r$, deci se obține sinusoida generalizată $y = 1,73 r \sin x$, (pentru $r = 1$; $y = 1,73 \sin x$) și se va obține șablonul din figura 99b.

Dacă $\alpha = 30^\circ$, $h = r \operatorname{tg} 30^\circ = r \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,57 r$; se obține sinusoida $y = 0,57 r \sin x$ (sau, pentru $r = 1$, $y = 0,57 \sin x$). Cele două părți ale cotului vor face în acest caz 120° .

Observații. În general, pentru ca axele celor două coturi să facă între ele un unghi β , unghiul α se va obține din relația $\beta = 180^\circ - 2\alpha$.

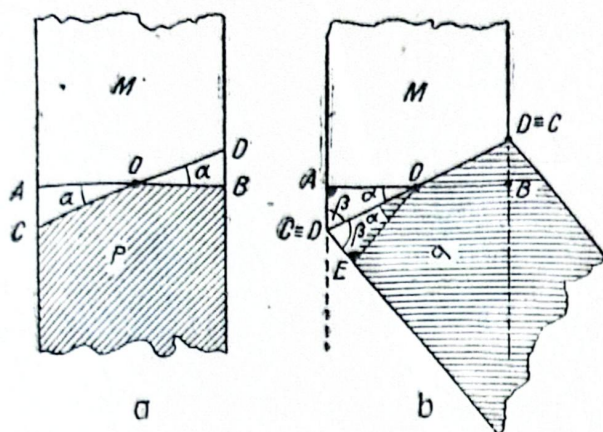


Fig. 100.

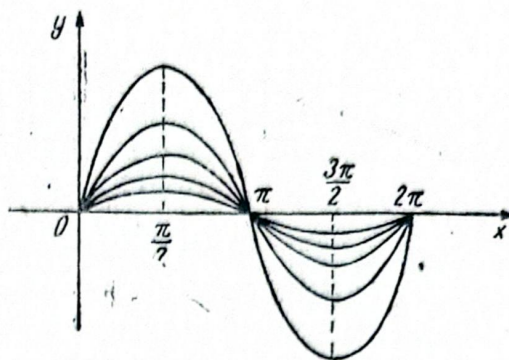


Fig. 101.

Acastă egalitate se poate deduce ușor din figurile 100 a — b. Dacă se taie fișa hașurată din figura 100 a, după linia CD , se întoarce cu 180° și se lipește de-a lungul liniei CD , se va obține figura 100 b.

Din triunghiul dreptunghic ACO se constată că $\widehat{ACO} = 90^\circ - \alpha$,
 $2 \widehat{ACO} = 180^\circ - 2\alpha$, sau $\beta = 180^\circ - 2\alpha$ și $\alpha = 90 - \frac{\beta}{2}$.

La construirea șablonului trebuie să cunoaștem raza r a secțiunii drepte, precum și unghiul β format de axele celor două părți ale cotului.

Cei doi parametri r și β fiind cunoscuți, ecuația sinusoidei generalizate după care se va construi șablonul va fi:

$$y = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \sin x.$$

Practic, șabloanele sînt cuprinse de obicei între limite restrînse, deoarece unghiul β nu ia decît valori cuprinse între 30° și 150° ($30^\circ \leq \beta \leq 150^\circ$).

Pentru $\beta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$, se obțin următoarele șabloane:

$$y = r \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ \sin x = r(2 + \sqrt{3}) \sin x = 3,73 r \sin x,$$

$$y = r \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ \sin x = r\sqrt{3} \sin x = 1,73 r \sin x,$$

$$y = r \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ \sin x = r \sin x,$$

$$y = r \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ \sin x = r \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x = 0,57 r \sin x,$$

$$y = r \cdot \operatorname{ctg} 75^\circ \sin x = r(2 - \sqrt{3}) \sin x = 0,27 r \sin x,$$

ale căror grafice se pot vedea în figura 101.

§ 2. Aplicații ale analizei combinatorii

1. Pentru executarea unei broaște de la telefonul cu monedă se folosesc 4 verturi de diferite forme.

Un vert este o plăcuță metalică de o anumită grosime și formă.

Mai multe verturi așezate unul peste altul și care se pot roti în jurul unui ax, datorită unui resort, constituie mecanismul unei broaște „Wertheim”.

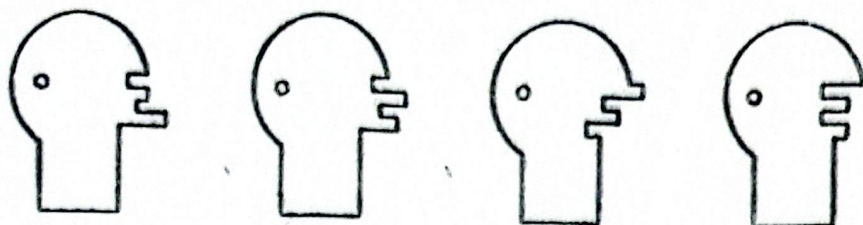


Fig. 102.

Dacă aceste verturi sînt așezate într-o anumită ordine, broasca se deschide cu un anumit fel de cheie.

Cheia cu care se deschide o astfel de broască are anumite forme care depind de numărul și profilul verturilor (fig. 102).

Se întreabă, cîte broaște care se pot deschide cu chei diferite se pot construi, știind că fiecare broască trebuie să conțină 4 verturi, iar o broască poate să difere de alta, fie prin forma verturilor, fie prin ordine, fie și prin forma și ordinea lor.

Soluție. Va trebui să trecem în revistă toate pozițiile posibile a celor 4 verturi :

— *Cele 4 verturi identice.* Dacă notăm cu a, b, c, d cele 4 verturi, vom putea avea 4 broaște diferite care au toate verturile identice : $(a a a a)$, $(b b b b)$, $(c c c c)$, $(d d d d)$.

În acest caz, o broască diferă de alta numai prin forma verturilor, iar numărul de broaște diferite, N_1 care se pot forma este :

$$N_1 = C_4^1 = 4.$$

— *Trei verturi identice al patrulea diferit.* Vom presupune că cele trei verturi identice sînt egale cu a , iar al patrulea cu b .

Cum vertul b poate ocupa 4 poziții diferite față de a , vom avea următoarele situații : $(b a a a)$, $(a b a a)$, $(a a b a)$, $(a a a b)$.

Dacă schimbăm pe b cu a , vom avea în compunerea unei broaște 3 verturi b și un vert a . Deci cu cele două verturi a și b putem construi $2 \cdot C_4^1$ broaște diferite. Cum în total avem 4 verturi diferite a, b, c, d , vom putea construi atîtea broaște cu două verturi diferite, cîte combinații se pot face cu 4 obiecte luate cîte două, adică C_4^2 . Deci, numărul total N_2 de broaște care se pot construi cu 3 verturi identice și unul diferit va fi :

$$N_2 = 2C_4^1 : C_4^2 = 48.$$

— *Două verturi identice, două diferite.* Dacă cele două verturi identice sînt egale cu a , iar cele două diferite cu b și c , acestea vor putea ocupa față de a următoarele 6 poziții : $(b c a a)$, $(b a c a)$, $(b a a c)$, $(a b c a)$, $(a b a c)$, $(a a b c)$; în total, C_4^2 poziții diferite.

Schimbînd pe b cu c , vom obține alte C_4^2 broaște diferite : $(c b a a)$, $(c a b a)$, $(c a a b)$, $(a c b a)$, $(a c a b)$, $(a a c b)$.

Dacă menținem verturile diferite b și c , putem construi atîtea broaște diferite cîte verturi identice putem avea. În cazul nostru $4 - 2 = 2$; pe a și d .

Dacă menținem acum verturile identice, vom putea construi atîtea broaște diferite cîte combinații se pot face cu cele 4 verturi a, b, c, d , luate cîte două, adică C_4^2 .

În total, numărul broaștelor diferite care se pot construi cu două verturi identice și două diferite va fi:

$$N_3 = 2(4 - 2) \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 = 144.$$

— *Două verturi identice, celelalte două tot identice.* Dacă vom considera două verturi egale cu a și celelalte două egale cu b , vom putea avea următoarele 6 poziții diferite: $(a a b b)$, $(a b a b)$, $(a b b a)$, $(b a a b)$, $(b a b a)$, $(b b a a)$; adică C_4^2 broaște diferite.

Dacă schimbăm pe a cu b , din motive de simetrie nu vom obține nici o poziție diferită de cele 6 menționate. Dar cu cele 4 verturi diferite $(a b c d)$ vom putea construi C_4^2 broaște diferite (numărul combinărilor a 4 obiecte luate câte două): $(a a b b)$, $(a a c c)$, $(a a d d)$, $(b b c c)$, $(b b d d)$, $(c c d d)$.

Numărul total de broaște diferite, în acest caz, va fi:

$$N_4 = C_4^2 \cdot C_4^2 = 36.$$

— *Toate verturile diferite.* În acest caz, o broască diferă de alta numai prin ordinea verturilor, deci vom avea atâtea broaște diferite câte permutări se pot face cu 4 obiecte:

$$N_5 = P_4 = 4! = 24.$$

În concluzie, numărul total N de broaște care conțin 4 verturi, iar o broască diferă de alta, fie prin forma, fie prin ordinea, fie și prin forma și prin ordinea verturilor va fi:

$$N = \sum_{i=1}^5 N_i = 4 + 48 + 144 + 36 + 24 = 256.$$

Observație: vom presupune că avem 4 obiecte diferite: a_1, a_2, a_3, a_4 . Ne propunem să calculăm numărul G_4^1 , al tuturor grupelor simple și cu repetiție ce se pot forma cu cele 4 obiecte date.

Numărul grupelor simple ce se pot forma cu un singur obiect va fi 4:

$$a_1, a_2, a_3, a_4,$$

Deci $G_4^1 = 4$.

Adăugăm la dreapta fiecărei grupe de câte un obiect, pe rînd pe fiecare din cele 4 obiecte:

$a_1 a_1$	$a_2 a_1$	$a_3 a_1$	$a_4 a_1$
$a_1 a_2$	$a_2 a_2$	$a_3 a_2$	$a_4 a_2$
$a_1 a_3$	$a_2 a_3$	$a_3 a_3$	$a_4 a_3$
$a_1 a_4$	$a_2 a_4$	$a_3 a_4$	$a_4 a_4$

Am format astfel toate grupele ce conțin câte două obiecte.

Numărul acestor grupe va fi:

$$G_4^2 = 4G_4^1 = 4^2.$$

Repetăm procedeul, așezînd la dreapta fiecărei din cele 4^2 grupe pe rînd pe fiecare din cele 4 obiecte. Se vor forma astfel toate grupele care conțin câte 3 obiecte. Deoarece la fiecare din cele 4^2 grupe formate mai sus va trebui să adăugăm pe rînd pe $a_1 a_2 a_3 a_4$, numărul grupelor astfel formate va fi:

$$G_4^3 = 4G_4^2 = 4 \cdot 4^2 = 4^3.$$

Continuăm procedeul, adăugînd la dreapta celor 4^3 grupe astfel formate, pe rînd aceleași 4 obiecte a_1, a_2, a_3, a_4 .

Vom forma astfel toate grupele de cîte 4 obiecte. Numărul lor va fi:

$$G_4^4 = 4G_4^3 = 4 \cdot 4^3 = 4^4.$$

În acest mod am obținut toate grupele de 4 obiecte ce se pot forma, astfel încît o grupă să difere de alta, fie prin forma, fie prin ordinea, fie și prin forma și prin ordinea obiectelor. Numărul lor va fi $G_4^4 = 4^4 = 256$.

Generalizare. Dacă în definiția dată aranjamentelor simple nu punem condiția ca obiectele ce compun o grupă să fie distincte, obținem aranjamente cu repetiție.

Pentru a obține formula care ne dă numărul total de grupe ce se pot astfel forma, pornim de la numărul grupelor simple ce se pot forma cu n obiecte: $a_1, a_2, \dots, a_n$ luate cîte unul.

Numărul acestor grupe este:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

și conține n grupe; $G_n^1 = n$.

Adăugăm la dreapta fiecărei grupe obținute mai sus pe rînd cele n obiecte: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Vom obține toate grupele de două obiecte:

$$\begin{array}{cccc} a_1a_1 & a_2a_1 & \dots & a_na_1 \\ a_1a_2 & a_2a_2 & \dots & a_na_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1a_n & a_2a_n & \dots & a_na_n \end{array}$$

Vom avea în total n^2 astfel de grupe:

$$G_n^2 = n \cdot G_n^1 = n^2.$$

Repetînd procedeul de m ori¹, obținem succesiv:

$$G_n^3 = n G_n^2 = n^3, \dots, G_n^{m-1} = n G_n^{m-2} = n^{m-1}, G_n^m = n G_n^{m-1} = n^m.$$

În particular, dacă $m = n$; $G_n^n = n^n$.

Observații: Dacă notăm cu $N(n)$, numărul broaștelor care se pot deschide cu chei diferite în condițiile problemei și facem succesiv $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$, obținem:

$$N(2) = 2^2 = 4; N(3) = 3^3 = 27; N(4) = 4^4 = 256;$$

$$N(5) = 5^5 = 3125; N(6) = 6^6 = 46656; \dots$$

Se constată că $N(n)$ crește foarte repede cu n .

Dacă într-o localitate se pun în vînzare cel mult 3125 lacăte, va fi suficient ca aceste lacăte să aibă în construcția lor 5 verturi. În acest caz vom fi siguri că în localitatea respectivă nu vor exista două lacăte care se pot deschide cu aceeași cheie.

Numărul maxim de verturi diferite, care în mod practic se pot utiliza la fabricarea broaștelor de tip „Wertheim”, este 6. În acest caz vom putea construi 46 656 broaște care se pot deschide cu chei diferite.

¹ unde m poate fi mai mare ca n , deoarece nu am pus condiția ca numărul obiectelor ce fac parte din fiecare grupă să fie distincte.

2. Unele fabrici construiesc lacăte fără chei (fig. 103). Aceste lacăte se deschid cu ajutorul unui „cifru secret”, cunoscut numai de posesorul lacătului și de fabrică. Pentru a putea deschide un astfel de lacăt trebuie să formăm un anumit număr (dacă pe fiecare disc cilindric sînt scrise cifre) sau un anumit cuvînt (dacă cifrele sînt înlocuite cu litere).

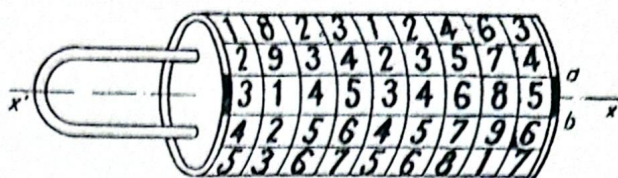


Fig. 103.

Să se calculeze numărul de lacăte care se pot deschide cu „cifru” diferit, dacă lacătul are în compunerea lui 9 discuri, iar pe fiecare disc sînt gravate toate numerele de la 1 la 9.

Soluție. Fiecare din cele 9 discuri cilindrice care au gravate numerele de la 1 la 9 în ordine succesivă, se pot roti în jurul axului comun $x'x$.

Numărul care trebuie format cu cele 9 cifre pentru ca lacătul să se poată deschide este așezat de obicei între două repere (a , b) așa cum se află numărul 314 534 685 din figura 103.

Deoarece nu punem condiția ca cifrele ce compun fiecare număr să fie distincte, numărul total al grupelor ce se pot forma este dat de numărul aranjamentelor cu repetiție a 9 obiecte. Cum $n = 9$, $G_9^9 = 9^9 = 389\,420\,481$.

Observație. Dacă posesorul unui astfel de lacăt uită cifrul, ar trebui să facă cel mult 9^9 încercări pentru a deschide lacătul. Dacă o încercare ar dura numai o secundă, ne-ar trebui cca 11 ani pentru toate cele 9^9 încercări.

3. O casă de bani are 3 uși. Pentru a ajunge la banii aflați în interior trebuie să deschidem cu ajutorul unui cifru fiecare ușă.

Pe prima ușă se află 4 discuri, pe a doua și a treia cîte 3 discuri. Pe fiecare disc sînt gravate cifrele 1, 2, 3, 4, 5 în ordine succesivă, fiecare disc putîndu-se roti în jurul unui ax comun. Cifrul se realizează formînd cu ajutorul discurilor cîte un anumit număr la fiecare ușă.

Care este numărul caselor de bani care se pot construi cu cifru diferit, știind că un cifru trebuie să difere de altul prin cel puțin un număr diferit la una din cele 3 uși?

Soluție. Deoarece numărul discurilor este diferit de numărul cifrelor gravate pe ele, vom folosi formula aranjamentelor cu repetiție a n obiecte luate cîte m .

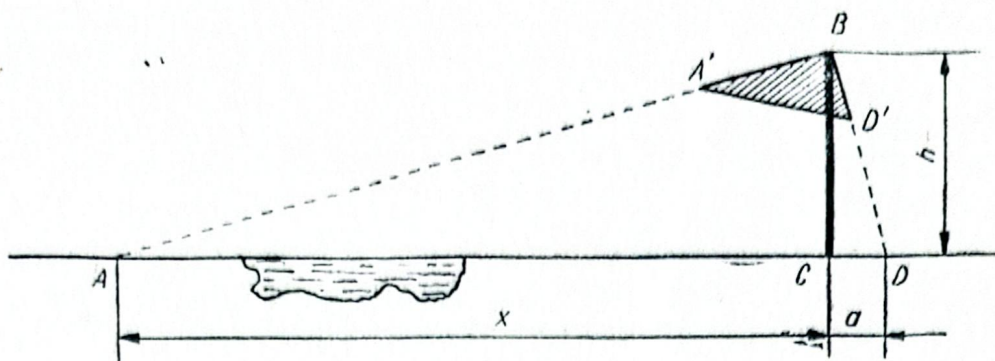
Cum pe prima ușă avem 4 discuri, iar pe fiecare disc sînt gravate 5 cifre, vom avea în total $N_5^4 = 5^4$ case cu cifru diferit.

Pe ușa a doua și a treia vom avea $N_5^3 = 5^3$ case cu cifru diferit. Numărul total al caselor de bani care vor avea cifru diferit va fi:

$$N = N_5^4 \cdot N_5^3 \cdot N_5^3 = 5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 5^{10} = 9765625.$$

§ 3. Aplicații în topografie

1. Să se determine distanța de la un punct C la un punct A vizibil dar înaccessibil din cauza unui obstacol (riu, lac, groapă, teren mlăștinos etc.).



Soluție. În vârful unui baston BC de lungime cunoscută $h = 1500$ mm se montează un echer $A'BD'$ cu unghiul drept în B , putînd oscila în jurul acestui punct (fig. 104).

Se rotește echerul în jurul punctului B , pînă cînd se vede punctul A de-a lungul catetei $|A'B|$ (folosind o lunetă care se așază pe cateta $|BA'|$), apoi se fixează echerul în această poziție.

Se fixează apoi luneta de-a lungul catetei $|BD'|$ și se vizează punctul D situat pe teren cu ajutorul unui indicator care se deplasează pînă cînd va fi prins în cîmpul vizual al lunetei. În acel moment se fixează punctul D de pe teren și se măsoară distanța $\|CD\| = a$. Din triunghiul dreptunghic ABD , putem scrie

$$\|BC\|^2 = \|AC\| \cdot \|CD\|$$

sau

$$x = h^2 : a.$$

Dacă $a = 50$ mm, se va găsi: $x = 45$ m.

2. Să se determine înălțimea unui turn, a unei case, a unui pom sau a unui deal etc., vizibil dar inaccesibil din cauza unui obstacol peste care nu putem trece (fig. 105).

Soluția 1. Folosind același procedeu descris la problema precedentă, se vizează vârful B și se fixează echerul în această poziție. Se vizează punc-

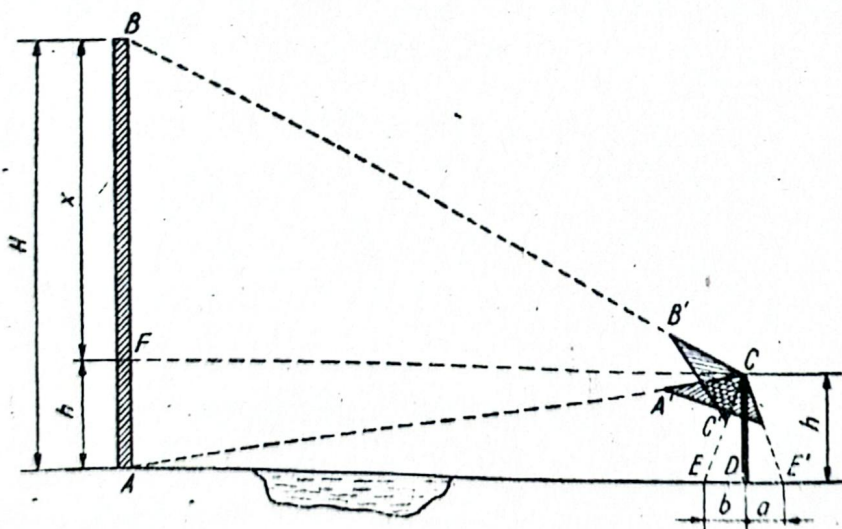


Fig. 105.

tul E situat pe teren și se măsoară distanța $\|DE\| = b$; apoi se vizează punctul A și se măsoară distanța $\|DE'\| = a$.

$$\triangle BFC \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{\|BF\|}{\|ED\|} = \frac{\|FC\|}{\|CD\|}, \quad \frac{x}{b} = \frac{\|FC\|}{\|CD\|} \Rightarrow x = b \cdot \frac{\|FC\|}{\|CD\|}$$

$$\triangle CFA \sim \triangle CDE' \Rightarrow \frac{\|FA\|}{\|DE'\|} = \frac{\|FC\|}{\|CD\|}, \quad \frac{h}{a} = \frac{\|FC\|}{\|CD\|} \Rightarrow h = a \cdot \frac{\|FC\|}{\|CD\|}$$

$\frac{x}{h} = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a} h$, dacă $a = 20$ mm, $b = 100$ mm, $h = 1500$ mm, se va găsi $x = 7,5$ m, iar înălțimea turnului va fi $H = 7,5 + 1,5 = 9$ m.

Soluția. 2 Se așază o oglindă plană culcată orizontal pe suprafața Pământului în punctul C , apoi observatorul se deplasează pînă ce vede raza reflectată din punctul B (A, C, I , sînt situate în linie dreaptă), figura 106.

Se deplasează apoi oglinda în C' și observatorul în M' unde se vede raza reflectată din B (A, C', I' , sînt situate în linie dreaptă).

Dacă notăm cu:

$\|MI\| = \|M'I'\| = h$ înălțimea observatorului,

$\|CC'\| = a$ = distanța dintre poziția celor două oglinzi,

$\|CI\| = b$; $\|C'I'\| = b'$, distanța de la poziția oglinzilor la piciorul observatorului, vom putea scrie (fig. 106):

$$\triangle BAC \sim \triangle MIC; \Rightarrow \frac{\|AB\|}{\|MI\|} = \frac{\|AC\|}{\|CI\|},$$

$$\triangle BAC' \sim \triangle M'I'C'; \Rightarrow \frac{\|AB\|}{\|M'I'\|} = \frac{\|AC'\|}{\|C'I'\|},$$

$$\frac{\|AB\|}{\|MI\|} = \frac{\|AC\|}{\|CI\|} = \frac{\|AC'\|}{\|C'I'\|} = \frac{\|AC'\| - \|AC\|}{\|C'I'\| - \|CI\|} = \frac{a}{b' - b} =$$

$$= \frac{\|AB\|}{h} = \frac{\|AC\|}{b};$$

$$\|AB\| = \frac{ah}{b' - b}, \quad \|AC\| = \frac{ab}{b' - b}.$$

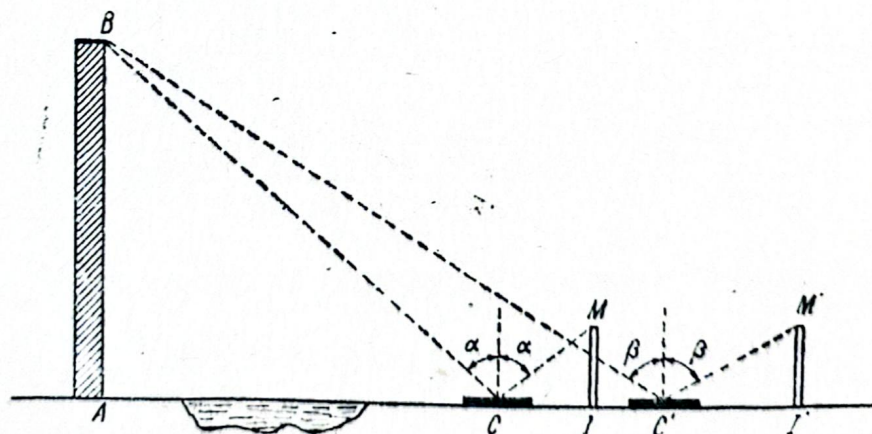


Fig. 106.

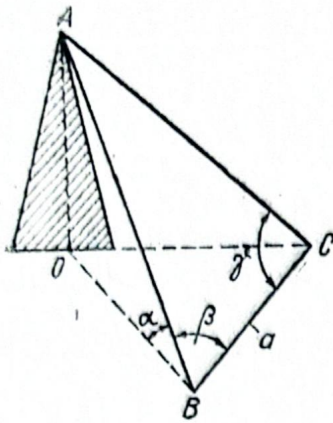


Fig. 107.

Soluția 3. Se consideră pe teren o bază, BC (fig. 107) pe care o măsurăm $\|BC\| = a$. Se măsoară apoi unghiurile $\beta = m(\widehat{ABC})$; $\gamma = m(\widehat{ACB})$; făcute de razele vizuale¹ ce trec prin vârful A cu latura $|BC|$.

În $\triangle ABC$ cunoaștem latura $|BC|$ și unghiurile $\widehat{ABC}$ și $\widehat{ACB}$ și deci putem determina pe $|AB|$ din teorema sinusului:

$$\frac{\|AB\|}{\sin \gamma} = \frac{\|BC\|}{\sin (\beta + \gamma)}; \quad \|AB\| = \frac{a \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}.$$

Determinăm apoi unghiul α format de raza vizuală BA cu orizontala BO . Din triunghiul dreptunghic AOB se obține:

$$\|AO\| = \|AB\| \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}.$$

Aplicație. Pentru $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $a = 60$ m; găsim $\|AO\| = 15\sqrt{6}$.

3. Să se calculeze distanța dintre două puncte vizibile dar inaccesibile (din cauza unui obstacol).

Soluție. Fie $\|AB\| = x$ distanța ce trebuie calculată (fig. 108). Alegem o bază $\|CD\| = a$ și măsurăm cu ajutorul unui grafometru¹ unghiurile

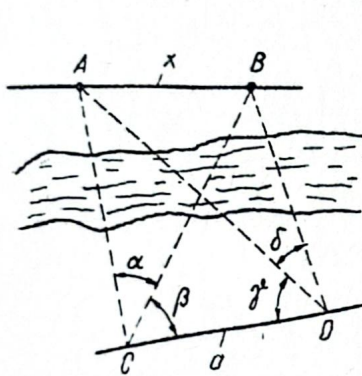


Fig. 108.

α = $m(\widehat{ACD})$, β = $m(\widehat{BCD})$, γ = $m(\widehat{ADC})$, δ = $m(\widehat{ADB})$ (fig. 108).

Aplicând teorema sinusului în triunghiurile ACD și BCD se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\|CD\|}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)} &= \frac{\|AC\|}{\sin \gamma} = \\ &= \frac{\|AD\|}{\sin (\alpha + \beta)}, (\triangle ACD) \end{aligned}$$

$$\frac{\|CD\|}{\sin (\beta + \gamma + \delta)} = \frac{\|BC\|}{\sin (\gamma + \delta)} = \frac{\|BD\|}{\sin \beta}, (\triangle BCD)$$

din care se deduce:

$$\|AC\| = \frac{a \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}; \quad \|BC\| = \frac{a \sin (\gamma + \delta)}{\sin (\beta + \gamma + \delta)}.$$

¹ Instrumentul de măsurat unghiurile formate de două raze vizuale $|OA|$ și $|OB|$.

Apoi, din triunghiul ABC , teorema cosinusului ne dă :

$$x^2 = \|AB\|^2 = \|AC\|^2 + \|BC\|^2 - 2\|AC\| \cdot \|BC\| \cdot \cos \alpha$$

Aplicație. Pentru $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 75^\circ$; $\gamma = 60^\circ$; $\delta = 15^\circ$ se obține

$$\|AC\| = \frac{a}{2}(\sqrt{18} + \sqrt{6}), \quad \|BC\| = \frac{a}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

$$x = \|AB\| = a\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} \approx 2,9a.$$

Probleme propuse

1. O statuie de înălțime (MO) se vede din punctele coliniare A, B, C sub unghiurile $m(\widehat{MAO}) = 3\alpha$, $m(\widehat{MBO}) = 2\alpha$, $m(\widehat{MCO}) = \alpha$.

Știind că $\|AB\| = 10$ m, $\|BC\| = 25$ m, se cere : înălțimea statuii și distanța $d(O, A)$, știind că $\alpha = 15^\circ$.

R. Se va găsi :

$$\|OM\| = \frac{10 \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}; \quad \|OA\| = \frac{10 \operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Pentru cazul particular $\alpha = 15^\circ$; $\|OM\| = \|OA\| = 5(\sqrt{3} + 1)$.

2. Un observator așezat pe malul unei ape, vede un arbore AO plantat pe malul opus, sub un unghi $m(\widehat{AMO}) = 50^\circ$. Depărtându-se cu 40 m de mal, unghiul sub care se vede arborele este de $m(\widehat{ANO}) = 25^\circ$. Se cere înălțimea arborelui AO și lățimea apei OM .

R. Se va găsi : $\|OA\| = 40 \sin 50^\circ$; $\|OM\| = 40 \cos 50^\circ$.

3. Un paratrăsnet, înalt de 3 m ($\|AB\| = 3$), se află situat deasupra unei clădiri BC . De la fereastra unei case vecine situată la 6 m deasupra orizontului ($\|DE\| = 6$) și la 15 m depărtare de baza clădirii considerate ($\|CE\| = 15$), paratrăsnetul se vede sub un unghi de 5° . Să se calculeze înălțimea clădirii ($\|BC\| = ?$).

4. Un balon captiv este văzut din 3 puncte A, B, C necoliniare și situate în același plan orizontal, sub unghiurile α, β, γ față de orizont. Cunosând laturile a, b, c ale triunghiului ABC , precum și unghiurile α, β, γ , se cere înălțimea $h = \|MO\|$ a balonului.

§ 4. Metode practice de împărțire a unui unghi în trei părți egale

Această problemă cunoscută din antichitate sub denumirea de „trisecția unghiului” nu poate fi rezolvată numai cu rigla și compasul.

În desenul tehnic, trisecția unghiului se poate rezolva prin unele metode practice, folosind în afară de riglă și compas și un instrument simplu numit „trisector”.

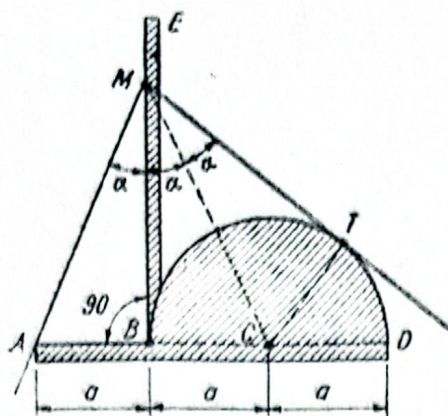


Fig. 109.

1. Un astfel de aparat care se poate vedea în figura 109 se compune din rigla orizontală $|AD|$, rigla verticală

$$|EB| \perp |AD|$$

și semicercul de diametru $||BD||$, construite astfel încît

$$||AB|| = ||BC|| = ||CD|| = a,$$

solidar legate între ele (construite dintr-o singură bucată, executată din material plastic, din metal sau din lemn etc.).

Modul de utilizare. Fie AMT unghiul care urmează să fie împărțit în 3 părți egale. Se așază aparatul astfel încît vârful M să se așeze pe latura verticală $|EB|$, latura $|MA|$ să treacă prin vârful A al instrumentului, iar cealaltă latură $|MT|$ să fie tangentă la semicercul cu centrul în C .

Se marchează¹ punctele B și C pe hîrtie și se unesc cu vârful M . Din egalitatea triunghiurilor:

$$\triangle AMB = \triangle BMC = \triangle CMT,$$

se deduce

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{CMT}) = \alpha.$$

2. Fie xOy unghiul care urmează a fi împărțit în trei părți (fig. 110). Se ia pe latura Oy un punct M , prin care se duce o paralelă la cealaltă latură ($||MB|| \parallel Ox$) și perpendiculara $|MP|$ pe Ox ($|MP| \perp Ox$).

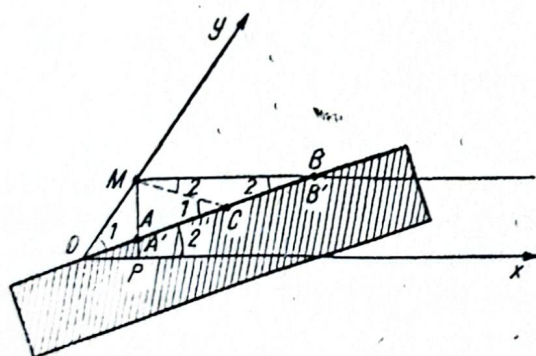


Fig. 110.

Pe marginea rectilinie a unei benzi de carton (sau material plastic), hașurată în figură se marchează două puncte A' și B' , astfel încît distanța $||A'B'||$ să fie egală cu $2||OM||$. Se potrivește apoi banda, astfel ca: punctul A' să coincidă cu punctul A situat pe $|MP|$, punctul B' să fie situat pe paralela $|MB|$, iar vârful O să fie pe prelungirea $|A'B'|$ a benzii.

Această operație se realizează ușor făcînd să alunece punctul A' pe perpendiculara $|MP|$, iar punctul B' pe paralela $|MB|$, pînă cînd marginea rectilinie a benzii trece prin vârful O al unghiului.

Se fixează apoi punctul A pe $|MP|$ în dreptul punctului A' . Unghiul

$\widehat{POA}$ este o treime din unghiul $\widehat{POM}$, după cum rezultă din următoarele:

$\widehat{O}_2 = \widehat{B}_2$ (ca alterne interne) și, deoarece am luat prin construcție

¹ În centrul cercului C se află un mic orificiu circular pentru a putea marca poziția acestui punct cu vârful ascuțit al creionului sau vârful compasului.

$\|AC\| = \|CB\| = \|OM\|$ și $\widehat{PMB} = 90^\circ$, rezultă că $\|MC\| = \|OM\|$ și deci:

$$\widehat{O}_1 = \widehat{C}_1 = 2\widehat{B}_2, \quad \widehat{O}_1 = 2\widehat{O}_2.$$

Pentru ca trisecția unghiului $\widehat{xOy}$ să fie terminată, urmează ca unghiul $\widehat{AOB}$ să fie împărțit în două părți egale.

§ 5. Volumul unor corpuri

În practică se întâlnesc corpuri avînd forma unui *obelisc* (fundatii de piatră sau beton, grămezi de nisip sau prundiș) ca cele din figura 111; sau forma unei *pene* (ce servesc la fixarea a două piese metalice sau de lemn) ca cele din figura 112. Acestea fac parte din categoria de corpuri numită *prismatoizi*.

Un prismatoid este un poliedru avînd bazele două poligoane situate în plane paralele (numărul și poziția laturilor fiind oarecare), iar fețele laterale sînt triunghiuri, paralelograme, trapeze sau dreptunghiuri. Suprafețele laterale sau totale se calculează cu formule cunoscute pentru aria triunghiului, a patrulaterelor, a poligoanelor etc.

Volumul prismatoidului se calculează cu ajutorul formulei lui Newton-Simpson:

$$V = \frac{h}{6} (B + b + 4B_m), \quad (1)$$

în care: h = înălțimea; B = aria bazei mari; b = aria bazei mici; B_m = aria secțiunii medii (obținută prin intersecția prismatoidului cu un plan paralel cu bazele la egală distanță de ele).

1. *Volumul obeliscului.* Folosind notațiile din figura 111, bazele fiind dreptunghiuri, obținem:

$$B = ab; \quad b = a'b'; \quad a'' = \frac{a + a'}{2}; \quad b'' = \frac{b + b'}{2};$$

$$B_m = \frac{(a + a')(b + b')}{4};$$

$$V = \frac{h}{6} [2(ab + a'b') + ab' + a'b]. \quad (2)$$

2. *Volumul unei pene.* O pană (fig. 112) poate fi considerată un prismatoid avînd baza mare trape-

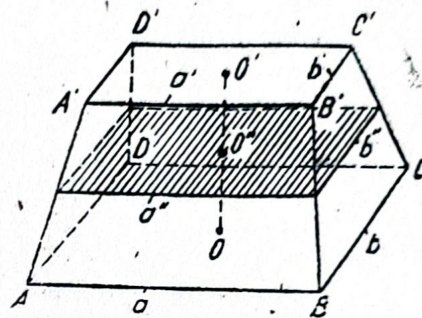


Fig. 111.

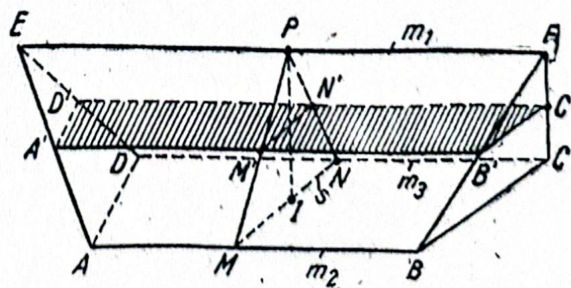


Fig. 112.

zul $ABCD$ de arie $B = (m_2 + m_3) \cdot \|MN\| : 2$, baza mică redusă la muchia m_1 , deci $b = 0$, iar baza medie B_m egală cu secțiunea $A'B'C'D'$. Cum $|A'B'|$ și $|D'C'|$ sînt linii mijlocii în trapezul $ABFE$, respectiv în trapezul $DCFE$, iar $\|M'N'\| = \|MN\| : 2$ (fiind linie mijlocie în triunghiul MNP) se obține:

$$B_m = \left(\frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{m_1 + m_3}{2} \right) \cdot \frac{\|M'N'\|}{2} = \left(\frac{2m_1 + m_2 + m_3}{8} \right) \cdot \|MN\|$$

$$V = \frac{\|PI\| \cdot \|MN\|}{6} \cdot \left(\frac{m_2 + m_3 + 2m_1 + m_2 + m_3}{2} \right) = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} \cdot S \quad (3)$$

Deci, volumul unei pene este egal cu mediă aritmetică a muchiilor laterale, înmulțită cu aria S a secțiunii drepte.

Caz particular des întîlnit în practică, baza este un dreptunghi (fig. 113). În acest caz:

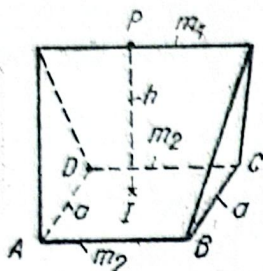


Fig. 113.

$$m_2 = m_3,$$

$$\|PI\| = h,$$

$$\|BC\| = \|AD\| = a;$$

$$V = ah(m_1 + 2m_2) : 6.$$

Observație. Formula lui Newton-Simpson (1) poate servi la calculul volumelor tuturor corpurilor geometrice studiate în liceu, ajungîndu-se ușor la formulele cunoscute.

Vom da cîteva exemple:

1. Volumul unui trunchi de piramidă, cu bazele poligoane regulate. Dacă notăm cu l , L , laturile poligoanelor celor două baze și cu x latura poligonului obținut prin secțiunea medie, obținem:

$$x = \frac{l + L}{2}, \quad \frac{l^2}{L^2} = \frac{b}{B}, \quad \frac{l}{L} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}; \quad \frac{B_m}{B} = \frac{x^2}{L^2} = \frac{(l + L)^2}{4L^2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{l}{2L} + \frac{l^2}{4L^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{B};$$

$4B_m = B + b + 2\sqrt{B \cdot b}$, și formula (1) ne dă:

$$V = \frac{h}{6} (B + b + B + b + 2\sqrt{B \cdot b}) = \frac{h}{3} (B + b + \sqrt{B \cdot b}).$$

2. Volumul unui trunchi de con, avînd bazele cercuri de rază R și r . Dacă notăm cu x raza cercului de secțiune medie, se deduce:

$$x = \frac{R + r}{2}; \quad B_m = \pi \left(\frac{R + r}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} (R + r)^2.$$

$$V = \frac{\pi h}{6} \left[R^2 + r^2 + 4 \cdot \frac{1}{4} (R + r)^2 \right] = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

3. Volumul sferei. Cum $B = b = 0$, $B_m = \pi R^2$, $h = 2R$, formula (1) ne dă:

$$V = \frac{2R}{6} (0 + 0 + 4\pi R^2) = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

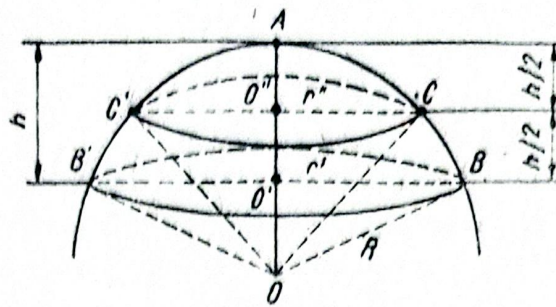


Fig. 114.

4. Volumul unui segment sferic. Folosind datele din figura 114, vom putea scrie:

$$V = \frac{h}{6} (\pi r'^2 + 4\pi r''^2).$$

Cum din $\triangle OO'B$ și $\triangle OO''C$:

$$r'^2 = 2Rh - h^2; \quad r''^2 = Rh - \frac{h^2}{4},$$

$$V = \frac{\pi h}{6} (2Rh - h^2 + 4Rh - h^2) = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h).$$

§ 6. Probleme de interpolare

Fenomenele întâlnite în mod curent în practică, în tehnică, în economie etc. se pot exprima printr-o funcție de una, două sau mai multe variabile.

Aceste funcții sînt, în marea lor majoritate, funcții continue în sensul strict matematic.

Aceasta înseamnă că variația argumentului cu o cantitate infinit mică va conduce la o variație infinit mică a funcției.

Principiul continuității care stă la baza evoluției celor mai multe fenomene întâlnite în practică permite cunoașterea expresiei analitice a funcției care exprimă intensitatea sau mărimea fenomenului cu ajutorul variabilelor de care acel fenomen depinde în mod natural.

Pentru a urmări, de exemplu, mersul unui tren, presiunea din interiorul cilindrului unei mașini cu abur în timpul unui ciclu, intensitatea sunetului sau a luminii produsă de o sursă la diferite distanțe etc., va trebui să se facă o serie de măsurători, sau să se culeagă o serie de date statistice, cu ajutorul cărora se va putea studia fenomenul analizat.

Folosind aceste valori, se întocmesc tabele care cuprind valorile argumentului (adică mărimea cauzei x_i) precum și valoarea funcției (adică mărimea corespunzătoare a fenomenului studiat y_i).

Dacă într-un sistem de coordonate ortogonale xOy se reprezintă grafic punctele $M_i(x_i, y_i)$ și se unesc printr-o trăsătură continuă, curba obținută ne va da o imagine aproximativă a fenomenului studiat.

Această aproximație va fi cu atât mai bună cu cît distanța dintre două valori consecutive (x_i, x_{i+1}) va fi mai mică și deci numărul observațiilor efectuate cît mai mare.

Practic, numărul observațiilor este restrâns; de aceea se pune problema de a completa aceste tabele, fie pentru valorile cuprinse între două valori determinate (operație care se numește interpolare), fie pentru valori situate în afara valorilor date în tabel (operație care se numește extrapolare).

Pentru ca o astfel de problemă să poată fi rezolvată, se presupune că există o lege după care au loc aceste fenomene.

Interpolarea constă în aflarea acestei legi și dă posibilitatea de a calcula mărimea fenomenului studiat pentru orice valoare a variabilei cuprinsă într-un anumit domeniu.

În cazul în care fenomenul depinde de o singură variabilă, problema interpolării se poate enunța astfel:

Fiind date n valori ale argumentului:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

și valorile corespunzătoare ale funcției obținute în mod experimental prin măsurători, cântăriri, numărări sau pe baze statistice:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

se cere să se găsească valorile funcției care corespund unei valori oarecare x a argumentului, cuprinsă în intervalul dat $x \in (x_1, x_n)$.

Ipoteza pe care o vom face asupra funcției pe care o căutăm este ca ea să fie continuă și în același timp să aibă forma cea mai simplă, adică să fie un polinom.

În calculele practice au căpătat o mare răspândire metodele de interpolare pentru aproximarea funcțiilor printr-un polinom, care poartă numele de *polinom de interpolare*.

Dacă, de exemplu, graficul întocmit pe baze tabulare (folosind coordonatele punctelor trecute în tabel) seamănă aproximativ cu un arc de parabolă, acea funcție se va aproxima cu un polinom de gradul doi. În acest scop se vor evalua valorile funcției (prin observații sau prin măsurători directe) pentru valorile x_0, x_1, x_2 ale variabilei (fig. 115), apoi se va construi polinomul:

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (4)$$

astfel încât, în punctele x_0, x_1, x_2 să coincidă cu funcția considerată, adică se vor determina coeficienții a_0, a_1, a_2 astfel încât să avem satisfăcute condițiile:

$$P(x_0) = y_0;$$

$$P(x_1) = y_1;$$

$$P(x_2) = y_2.$$

În acest scop se formează sistemul de ecuații:

$$a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0,$$

$$a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1, \quad (5)$$

$$a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2.$$

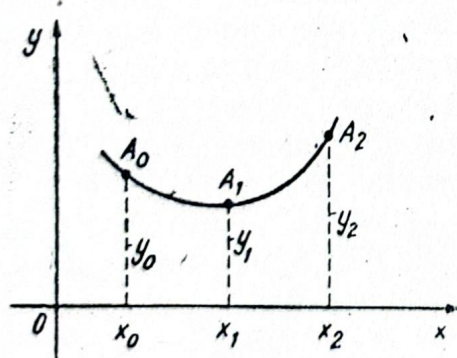


Fig. 115.

În mod analog se pot determina polinoamele: $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ care să fie respectiv egale cu $y_1, y_2, \dots, y_n$, pentru x egal respectiv cu $x_1, x_2, \dots, x_n$ și egale cu zero pentru toate celelalte valori. Adică:

$$P_i(x_i) = y_i, \text{ pentru } i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

și $P_i(x) = 0$, pentru $x = x_j$, ($i \neq 0, 1, 2, \dots, n$).

Se va găsi astfel:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}, \\ P_2(x) &= y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)}, \\ &\dots \dots \dots \\ P_n(x) &= y_n \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}. \end{aligned}$$

Dacă se însumează, se obține *polinomul de interpolare a lui Lagrange*, care se poate scrie prescurtat sub forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \cdot y_i.$$

Acest polinom care este de gradul n satisface condițiile:

$$P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, \dots, P(x_n) = y_n,$$

după cum ușor se poate constata.

Aplicație. Să se determine ecuația spațiului în funcție de timp în mișcarea unui vehicul, știind că în prima oră parcurge 14 km, în ora a doua tot 14 km, în a cincea 7 km și în a opta 21 km. Cum:

$$f(1) = 14, f(2) = 14, f(5) = 7, f(8) = 21 \quad (8)$$

formula lui Lagrange ne dă:

$$\begin{aligned} f(x) &= 14 \cdot \frac{(x - 2)(x - 5)(x - 8)}{(1 - 2)(1 - 5)(1 - 8)} + 14 \cdot \frac{(x - 1)(x - 5)(x - 8)}{(2 - 1)(2 - 5)(2 - 8)} + \\ &+ 7 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 8)}{(5 - 1)(5 - 2)(5 - 8)} + 21 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 5)}{(8 - 1)(8 - 2)(8 - 5)}; \\ f(x) &= \frac{1}{12} (3x^3 - 31x^2 + 72x + 124). \end{aligned} \quad (9)$$

În ipoteza unei legi polinomiale a spațiului în funcție de timp, ecuația mișcării va fi dată de (9), putînd calcula spațiul parcurs de vehicul în orice altă perioadă de timp.

Dacă se întocmește graficul funcției (9), se vor putea determina cu mai multă ușurință valorile funcției pentru diferitele valori ale variabilei x .

Se va găsi de exemplu, pentru $x = 4$, $f(4) = 9$ km/oră, pentru $x = 10$, $f(10) = 62$ km/oră....

În acest mod, interpolarea și extrapolarea se poate face direct pe cale grafică, prin simpla măsurare a ordonatelor corespunzătoare absciselor situate în interiorul sau în afara valorilor $x \in [1, 8]$.

Observații. Dacă vom presupune că variația spațiului în funcție de timp este polinomială, și se face după un polinom de gradul 3 de forma:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (10)$$

atunci, condițiile (8) ne conduc la sistemul:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 14 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 14 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 &= 7 \\ a_0 + 8a_1 + 64a_2 + 512a_3 &= 21, \end{aligned} \quad (11)$$

a cărui soluție:

$$a_0 = \frac{124}{12}, \quad a_1 = \frac{72}{12}, \quad a_2 = -\frac{31}{12}, \quad a_3 = \frac{3}{12},$$

introdusă în (10) ne conduce la același rezultat obținut în (9) aplicând formula lui Lagrange, care evită munca laborioasă, necesară rezolvării sistemului (11), de 4 ecuații liniare cu 4 necunoscute.

Din punct de vedere geometric, problema interpolării se pune astfel: fiind date $(n+1)$ puncte în plan să se determine ordonata ce corespunde unei abscise date, diferită de a celor $(n+1)$ puncte.

Cazuri particulare. Dacă se cunosc numai două puncte prin care trece curba, formula lui Lagrange dă:

$$y = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

și reprezintă ecuația unei drepte care trece prin punctele $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$.

Dacă se cunosc 3 puncte prin care trece curba $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ curba va fi o parabolă:

$$\begin{aligned} y = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \\ + y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Exemple

1. O grindă cu lungimea de 4 m suspendată pe două reazeme este supusă unei sarcini de 1000 kg/m uniform distribuite.

Momentele încovoietoare în secțiunile făcute la $1/4$, $1/2$ și $3/4$ din deschiderea ei sînt egale respectiv cu 1500 kgm, 2000 kgm și 1500 kgm. Să se calculeze prin interpolare momentul de încovoiere la fiecare zecime din deschiderea grinzii¹.

¹ Momentul încovoietor este o funcție de gradul doi de deschiderea x a grinzii: $M(x) = ax^2 + bx + c$.

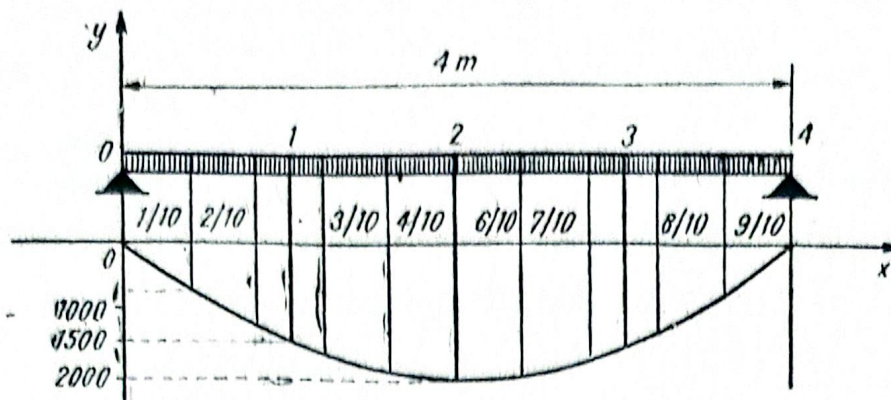


Fig. 116.

Să se întocmească graficul funcției obținute și să se verifice rezultatele prin interpolare grafică (fig. 116).

Dacă notăm cu $M(x)$ funcția care dă momentele încovoetoare în grindă pentru o deschidere x din lungimea ei și ținem seama că:

$$M(1) = 1500, M(2) = 2000, M(3) = 1500,$$

formula lui Lagrange ne dă:

$$M(x) = 1500 \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 2000 \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 1500 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)},$$

$$M(x) = -500x^2 + 2000x.$$

Deoarece funcția obținută reprezintă o parabolă simetrică în raport cu dreapta $x = 2$ ($M'(x) = -1000x + 2000 = 0$; $x = 2$) valorile lui $M(x)$ se vor calcula numai pentru secțiunile făcute la $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$ din deschiderea grinzii.

Cum lungimea grinzii este $l = 4$ m; vom calcula valorile lui $M(x)$ pentru $x_1 = \frac{1}{10} \cdot 4 = \frac{4}{10}$, $x_2 = \frac{2}{10} \cdot 4 = \frac{8}{10}$, $x_3 = \frac{3}{10} \cdot 4 = \frac{12}{10}$, $x_4 = \frac{4}{10} \cdot 4 = \frac{16}{10}$.

$$M\left(\frac{4}{10}\right) = M\left(\frac{36}{10}\right) = 720, M\left(\frac{8}{10}\right) = M\left(\frac{32}{10}\right) = 1280,$$

$$M\left(\frac{12}{10}\right) = M\left(\frac{28}{10}\right) = 1680; M\left(\frac{16}{10}\right) = M\left(\frac{24}{10}\right) = 1920.$$

Folosind graficul funcției $y = 500x^2 - 2000x$ (fig. 116), ordonatele punctelor ce corespund absciselor $x = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$ se pot măsura direct pe grafic.

Dacă parabola este construită corect și la o scară suficient de mare, se vor putea găsi valorile lui $M(x)$ pentru orice valoare a lui x cuprinsă în intervalul $[0, 4]$ prin simpla măsurare a ordonatelor respective.

2. Să se determine expresia intensității curentului electric care va încălzi în vid pînă la temperatura de 2500°K ¹ un filament de tungsteu a cărui rază este r .

În acest scop s-au făcut următoarele experiențe: prin 4 filamente de raze 0,030; 0,050; 0,080 și 0,100 mm s-au trecut curenți electrici pînă cînd aceste filamente așezate în vid s-au încălzit la 2500°K .

Măsurîndu-se intensitatea acestor curenți, s-au găsit: 0,690; 1,485; 3,000 și 4,200 A.

Să se determine prin interpolare și extrapolare intensitatea curentului corespunzător unui filament de 0,062 mm, respectiv 0,200 mm.

Folosind valorile razelor în microni², formula lui Lagrange ne dă:

$$\begin{aligned} I(r) = & \frac{(r-50)(r-80)(r-100)}{(30-50)(30-80)(30-100)} \cdot 0,690 + \\ & + \frac{(r-30)(r-80)(r-100)}{(50-30)(50-80)(50-100)} \cdot 1,485 + \\ & + \frac{(r-30)(r-50)(r-100)}{(80-30)(80-50)(80-100)} \cdot 3,000 + \\ & + \frac{(r-30)(r-50)(r-80)}{(100-20)(100-50)(100-80)} \cdot 4,200. \end{aligned}$$

Efectuînd calculele, se va găsi o funcție $I(r)$ care este un polinom de gradul 3.

Pentru a obține intensitatea curentului corespunzător filamentului de 0,062 mm = 62 microni, se va calcula $I(62)$ și se va găsi:

$$I(62) = (-0,0809 + 1,0835 + 1,4592 - 0,4147) \text{ A} = 2,047 \text{ A}.$$

Deci, pentru ca filamentul de tungsten cu raza de 62 microni să se încălzească la temperatura de 2500°K , va trebui ca prin el să circule un curent de 2,047 A. Din experiențele făcute, aplicînd metodele cunoscute din fizică, rezultă $I(62) = 2,048 \text{ A}$, deci o valoare foarte apropiată de cea obținută pe cale experimentală (eroarea este de un miliamper).

Pentru filamentul cu raza de 200 microni se obține:

$$I(200) = (-17,70 + 101 - 255 + 183,54) \text{ A} = 11,84 \text{ A}.$$

Metoda interpolării este folosită în general la prelucrarea datelor experimentale. Denumirea a fost introdusă de J. Wallis (1656).

¹ Temperatura în grade Kelvin se măsoară de la zero absolut și este dată de formula:
 $T = (t + 273,2)^{\circ}\text{K}$, unde t este temperatura în grade Celsius ($2500^{\circ}\text{K} = 2226,8^{\circ}\text{C}$).

² 1 micron = 10^{-3} mm.

CAPITOLUL VIII.

APLICAȚII ALE NOMOGRAFIEI

Tehnică actuală necesită în toate compartimentele ei de activitate un număr foarte mare de calcule. Aceste calcule, care provin în general din aplicarea unor formule uneori complicate, se făceau în institutele de construcții și proiectări cu multă pierdere de timp din partea celor ce le execută.

De aceea, omul de știință a conceput diferite mijloace practice care să ușureze munca necesară acestor calcule, atât de laborioase, care, prin uniformitatea lor, devin plictisitoare, răpind în același timp mii de ore de lucru care ar putea fi folosite cu succes în alte domenii de activitate.

Printre aceste mijloace, care duc la executarea calculelor cu mai multă ușurință, mărinđ astfel în mod considerabil *productivitatea muncii*, se află și nomograma, iar știința care se ocupă cu studiul nomogramelor se numește *nomografie*.

Cuvintul nomografie este compus din cuvintele grecești νομος (*nomos*), care înseamnă *lege*, și γραφειν (*grafein*), care înseamnă *a scrie*, iar nomograma este o reprezentare geometrică a unei relații funcționale între două, trei sau mai multe variabile.

Cunoscând relația funcțională $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$, se poate construi pentru ea o nomogramă, dacă sînt îndeplinite anumite condiții cu privire la numărul variabilelor și mai ales la forma analitică a funcției.

Scopul esențial al nomogramelor a fost și a rămas același de la începutul existenței lor, cel mai simplu auxiliar de calcul.

Economia de timp realizată prin folosirea lor este apreciabilă, iar faptul că ele pot fi mînuite cu ușurință chiar și de nespecialiști constituie o mare calitate a acestora.

Trebuie să precizăm, de asemenea, că expresia analitică a relației funcționale pentru care se construiește nomograma nu trebuie să fie neapărat rezolvată în raport cu variabila pe care o căutăm. Această condiție nu are, în general, nici o importanță; esențialul este să cunoaștem ecuația care leagă variabilele independente de funcția a cărei valoare este căutată.

Acest fapt constituie un mare avantaj pentru construcția nomogramelor, deoarece uneori explicitarea unei funcții de mai multe variabile în raport cu variabila pe care o căutăm este practic imposibilă, iar alteori, explicitarea funcției constituie însăși rezolvarea problemei.

De exemplu, ecuația de gradul 3 completă:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

se poate rezolva în raport cu x , folosind formula lui Cardan, după ce este adusă la forma¹ $x^3 + px + q = 0$, iar explicitarea ei în raport cu x , adică $x = f(p, q)$, constituie însăși rezolvarea ecuației.

În nomografie, rezolvarea ecuației complete de gradul 3 este la fel de simplă ca și a ecuațiilor:

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0,$$

$$x^5 + nx^2 + px + q = 0; \dots; x^m + nx^2 + px + q = 0.$$

Menționăm, de asemenea, cu privire la gradul de precizie, că se pot construi astăzi nomograme nu numai cu una sau două, ci chiar cu trei sau cu patru cifre semnificative exacte, ceea ce satisface cu prisosință necesitățile practice cele mai exigente; este vorba de nomogramele de mare precizie.

Nomografia este o disciplină care aparține matematicii aplicate și dă-tează relativ de scurt timp.

Primele nomograme apărute abia la începutul secolului al XIX-lea au fost **nomogramele reticulare** care și astăzi sînt cele mai cunoscute și mai larg răspîndite.

Primele nomograme reticulare apărute au fost acelea formate din rețele de drepte paralele cu axele de coordonate sau care trec prin originea axelor și dintr-un fascicul de curbe oarecare. Executarea lor se poate baza numai pe reprezentarea unei funcții de o singură variabilă.

Exemplu: Să se determine catelele unui triunghi, cînd se cunoaște ipotenusa și un unghi, cu ajutorul formulelor:

$$b = a \cos \varphi, \quad c = a \sin \varphi.$$

Într-un sistem de coordonate carteziane se va desena:

— un fascicul de drepte paralele cu axa Oy , care reprezintă valorile lui b ;

— un fascicul de drepte paralele cu axa Ox , care reprezintă valorile lui c ;

— un fascicul de drepte care trece prin origine și care fac cu axa Ox unghiul φ ($\varphi = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, \dots, 90^\circ$);

— un fascicul de cercuri concentrice cu centrul în origine, ale căror raze sînt egale cu a .

Atît fasciculele de drepte cît și fasciculele de cercuri se trasează echi-distant între ele (fig. 117).

Dacă a și φ sînt cunoscute, de exemplu: $a = 85$, $\varphi = 40^\circ$, se va căuta

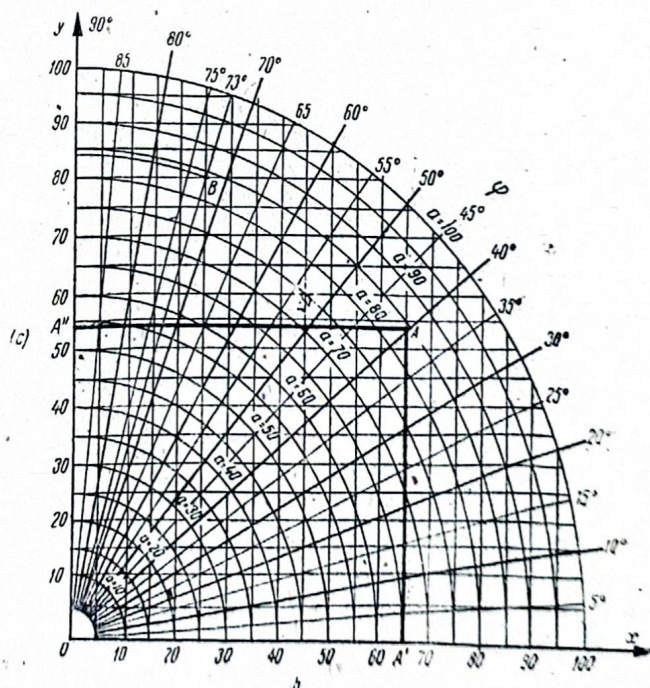


Fig. 117.

¹ Cu ajutorul substituției $x = X - \frac{a}{3}$.

punctul de intersecție al cercului de rază $a = 85$ cu dreapta care trece prin origine și face cu axa Ox unghiul $\varphi = 40^\circ$ (punctul A din fig. 117).

Citim valorile lui b și c pe dreptele din fasciculele respective, care trece prin punctul obținut. În exemplul dat $b = 65$, $c = 54$.

Efectuând calculele exact se constată că $b = 65,1$, $c = 54,6$ și deci rezultatele citite direct pe nomogramă prezintă o eroare sub 1%. Dacă s-ar fi construit nomograma la o scară mai mare și cu mai multă exactitate, eroarea ar fi fost și mai mică. În practică, în special în construcții, evaluările cu erori sub 1% sînt cu totul satisfăcătoare.

Explicarea rezultatelor este foarte simplă; distanțele $d(O, A')$, $d(O, A'')$, care ne dau valorile lui b și c , reprezintă chiar lungimea celor două catete în triunghiul OAA' , a cărui ipotenuză OA este raza cercului cu centrul în

origine $\|OA\| = a = 85$, iar unghiul $\widehat{AOA'} = \varphi = 40^\circ$ este unghiul format de ipotenuza OA cu axa Ox .

O astfel de nomogramă poate servi la rezolvarea triunghiurilor dreptunghice, în cazul cînd se cunoaște:

- ipotenuza și un unghi, pentru a afla catetele;
- cele două catete b și c , pentru a afla ipotenuza și un unghi;
- o catetă și un unghi, pentru a afla cealaltă catetă și ipotenuza;
- ipotenuza și o catetă, pentru a afla cealaltă catetă și un unghi.

Probleme propuse

1. Într-un triunghi dreptunghic se dau catetele $b = 25$ m și $c = 80$ m. Se cere ipotenuza a și unghiul ascuțit C .

R. $a = 84$, m, $\hat{C} = 73^\circ$.

2. Un triunghi dreptunghic are cateta $c = 75$ m și $\hat{C} = 65^\circ$. Se cere cateta b și ipotenuza a .

R. $b = 35$, $a = 83$.

3. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza $a = 32$ m și cateta $b = 25$ m; se cere cateta c și unghiul ascuțit C .

R. $c = 20$, $\hat{C} = 38^\circ$.

*
* *

Un alt gen de nomograme este acela elaborat de matematicianul francez Măurice d'Ocagne la sfîrșitul secolului al XIX-lea și se numesc **nomograme cu punctele aliniate și scări rectilinii**.

Exemple: 1. Nomograma pentru calculul mediei aritmetice a două numere.

În punctele A, B, C , coliniare și echidistante, se ridică perpendicularele Ax, By, Cz , care se gradează în milimetri (fig. 118).

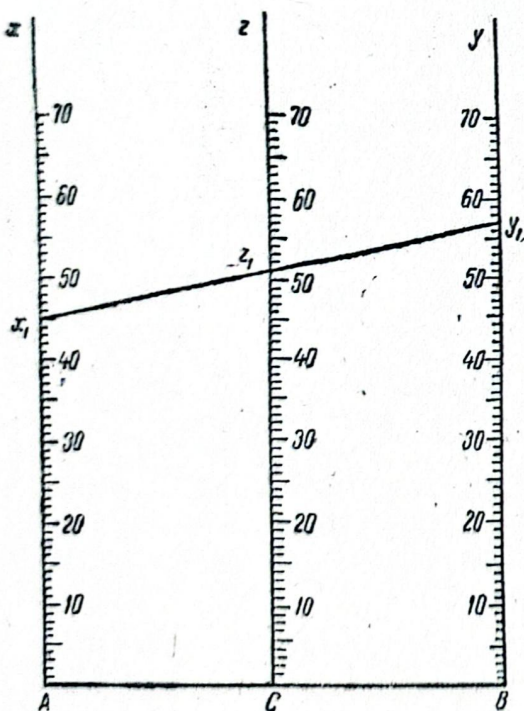


Fig. 118.

Dacă se unește punctul x_1 , situat pe scara Ax , cu un punct y_1 situat pe scara By , dreapta x_1y_1 va tăia scara Cz într-un punct z_1 . Deoarece în trapezul Ax_1y_1B , segmentul Cz_1 este linie mijlocie, există relația¹:

$$z_1 = \frac{x_1 + y_1}{2}.$$

De exemplu, pentru $x_1 = 45$, $y_1 = 57$, valoarea lui z_1 se poate citi direct pe scara Oz la intersecția acesteia cu dreapta x_1y_1 . Se va găsi $z_1 = 51$. Dacă facem calculul, găsim același rezultat:

$$z_1 = \frac{45 + 57}{2} = 51.$$

Dreptele Ax , By , Cz , gradate în mod uniform în milimetri, se numesc *scări rectilinii cu gradație uniformă*.

Deoarece punctele x_1 , y_1 , z_1 sînt situate pe aceeași dreaptă, nomograma se numește cu puncte aliniate și scări rectilinii echidistante; uniform gradate. Practic, dreapta x_1y_1 nu se trasează pe nomogramă, ci se folosește o riglă transparentă, pe mijlocul căreia se duce o dreaptă colorată. Această riglă se așază pe nomogramă astfel ca dreapta colorată să treacă prin punctele x_1 și y_1 . În punctul de intersecție al acestei drepte cu scara Oz se citește rezultatul, adică media aritmetică a numerelor x_1 și y_1 .

Pentru o precizie mai mare se vor lua pentru unitate diviziunile intermediare de 2 mm, 3 mm și 4 mm etc., în loc de 1 mm.

În figura 119 se poate vedea o nomogramă care permite calculul mediei aritmetice a două numere în care o diviziune de 1 mm corespunde la 0,25 unități și care este gradată numai pentru numerele de la 5 la 25.

Pe o astfel de nomogramă x_1 se pot citi numere din 3 sau chiar 4 cifre semnificative exacte.

Exemplu: $x_1 = 11,25$, $y_1 = 17,25$; media aritmetică se citește direct pe scara Oz în punctul z_1 de intersecție al acestei scări cu dreapta x_1y_1 . Se va găsi $z_1 = 14,25$.

În acest mod se pot realiza nomograme care să corespundă din punctul de vedere al preciziei scopurilor practice pentru care este construită gradația și numai pe intervalul pentru care va fi folosită.

Unitatea de măsură (în exemplul nostru, 4 mm) care corespunde numărului 1 se numește în nomografie *modul*.

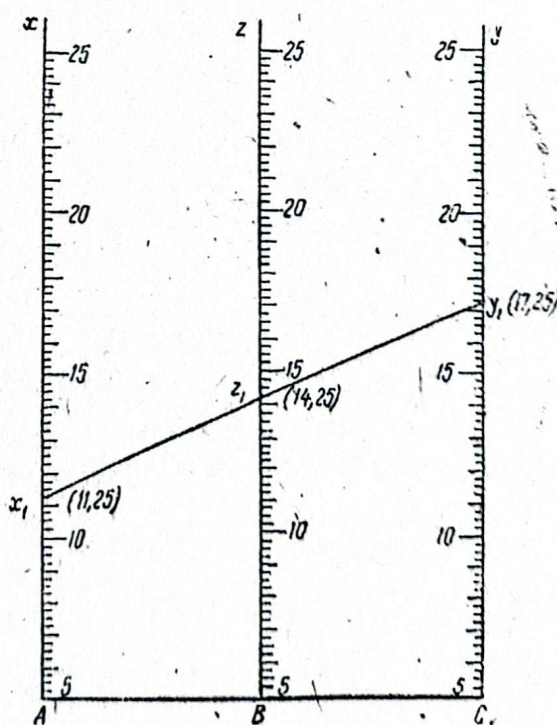


Fig. 119.

¹ Segmentele Ax_1 , By_1 , Cz_1 le vom nota prescurtat cu x_1 , y_1 , z_1 .

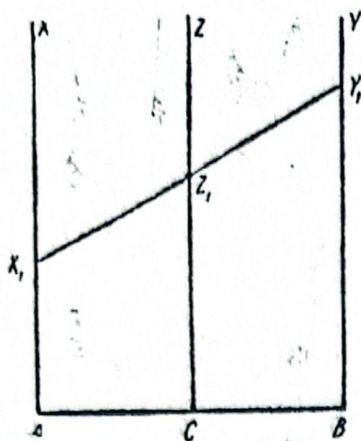


Fig. 120.

În acest scop se trasează dreptele paralele echidistante AX , BY , CZ (fig. 120) și dreapta X_1Y_1 , care taie pe CZ în Z_1 . Dacă se notează $\|AX_1\| = X$, $\|BY_1\| = Y$, $\|CZ_1\| = Z$, există întotdeauna relația:

$$Z = \frac{X + Y}{2},$$

pentru toate punctele coliniare X , Y , Z , situate respectiv pe dreptele AX , BY , CZ .

2. Nomograma pentru calculul sumei a două numere.

Se cere să construim o nomogramă pentru formula: $z = x + y$.

Dacă se scrie această formulă sub forma:

$$\frac{z}{2} = \frac{x + y}{2}$$

și se compară cu

$$Z = \frac{X + Y}{2},$$

atunci:

$$Z = \frac{z}{2}, \quad X = x, \quad Y = y.$$

Dacă se ia modulul egal cu 1, scara lui x și y se va grada în milimetri și fiecărei unități îi va corespunde 1 mm.

x	0	10	20	30	...	100
X	0	10	20	30	...	100

y	0	10	20	30	...	100
Y	0	10	20	30	...	100

Pentru a construi scara lui z , se ia modulul $\frac{1}{2}$, adică fiecărui milimetru îi corespund două unități.

Se gradează scara Oz în milimetri și se scrie în dreptul fiecărei diviziuni un număr de două ori mai mare decât este lungimea segmentului (fig. 121).

Gradația scării lui z se va face după tabela :

z	0	20	40	60	80	100	120	140	160
Z	0	10	20	30	40	50	60	70	80

Diviziunile intermediare se obțin divizînd segmentele în părți egale, deoarece Z variază proporțional cu z .

Exemplu : Dacă $x_1 = 41$, $y_1 = 73$, se obține $z_1 = 114$, număr care se poate citi direct pe scara Cz , la intersecția dreptei x_1y_1 cu această scară.

3. Nomograma pentru calculul diferenței a două numere

A scădea două numere, înseamnă a aduna un număr pozitiv cu unul negativ. De aceea se consideră nomograma construită pentru suma a două numere, se prelungesc scările AX , BY , CZ cu lungimi egale în partea opusă și se gradează cu numere negative, păstrînd același modul. În acest mod se obține o nomogramă (fig. 122) nu numai pentru diferența a două numere, ci, în general, pentru suma algebrică a două numere :

$$z = x + y, z = x - y, z = -x + y, z = -x - y, x \geq 0, y \geq 0.$$

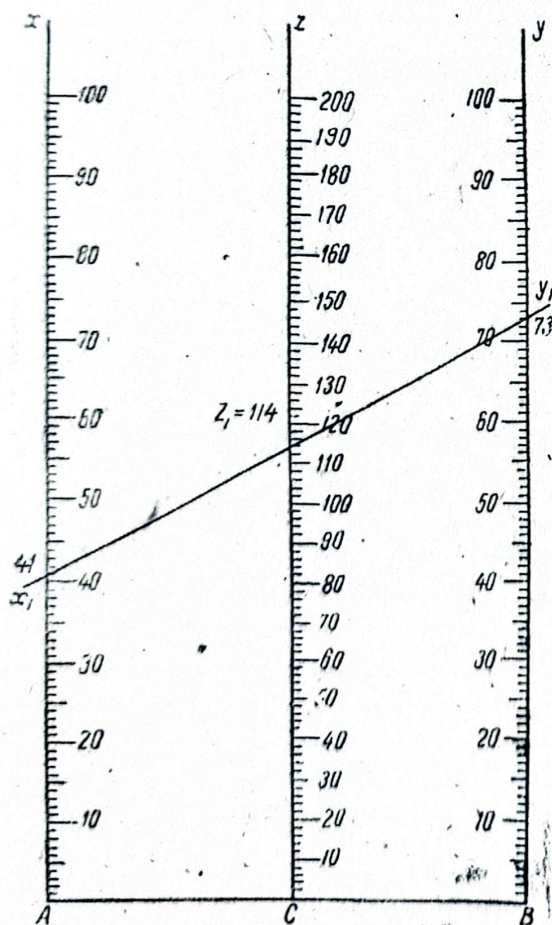


Fig. 121.

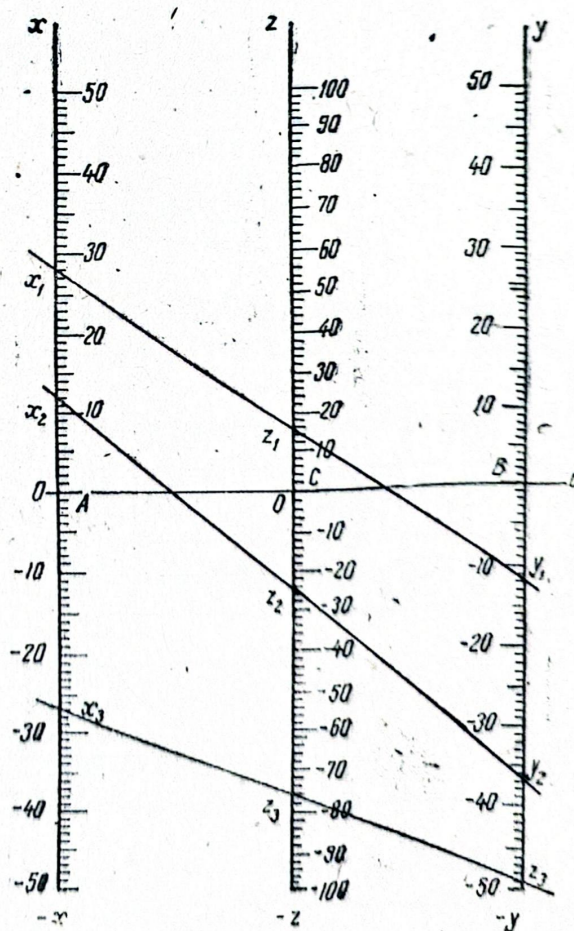


Fig. 122.

Exemple: Să se efectueze diferența: $28 - 12$; rezultatul se va citi direct pe scara Cz în punctul de intersecție al dreptei care trece prin punctele $x_1(28)$, $y_1(-12)$ cu această scară.

Se va găsi $z_1 = 16$ (fig. 122).

Să se calculeze diferența $12 - 37$; rezultatul se va citi direct pe scara Cz, în punctul de intersecție al dreptei care trece prin punctele $x_2(12)$, $y_2(-37)$ cu această scară. Se va găsi $z_2 = -25$.

Să se calculeze suma $(-27) + (-49)$; rezultatul se citește direct pe scara Cz. Se va găsi $z_3 = -76$.

Observație: În mod analog se pot construi nomograme pentru semisuma algebrică a două numere.

4. Nomograma pentru teorema lui Pitagora.

Pentru determinarea lui z , x sau y din relația:

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

cu ajutorul nomogramei se procedează astfel:

Se pune această relație sub forma:

$$\frac{z^2}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

și se compară cu

$$Z = \frac{X + Y}{2};$$

se găsește:

$$Z = \frac{z^2}{2}, \quad X = x^2, \quad Y = y^2.$$

Folosind aceste egalități, scările lui x , y , z se vor grada, dând acestor variabile valorile întregi 1, 2, 3, ... și calculând valorile corespunzătoare lui X , Y , Z .

Se vor obține următoarele tabele care permit gradarea celor trei scări:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Z	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32	40,5	50	60,5	72	84,5	98

Pentru scara valorilor lui x și y se va măsura începând din A , respectiv B , segmentele de 1, 4, 9, 16, 25, ..., 100 mm și se va scrie în dreptul lor 1, 2, 3, 4, ..., 10.

Pentru scara valorilor lui z , se vor măsura începînd din C segmente de 0,5; 2; 4,5; 8; 12,5; ...; 98 mm și se va scrie în dreptul lor 1, 2, 3, 4, ..., 14.

Se constată că diviziunile intermediare nu se mai pot obține prin împărțirea în părți egale; ele se obțin tot prin calcul (fig. 123).

Această nomogramă are gradații neuniforme, valorile lui x , y , z nu mai sînt nici egale și nici proporționale cu valorile lui X , Y , Z .

O astfel de nomogramă se numește *cu puncte aliniate, scări paralele echidistante și gradație neuniformă*.

Exemple: Se dă $x_1 = 8,5$, $y_1 = 7,6$; ipotenuza $z_1 = 11,4$ se citește direct pe nomogramă în punctul de intersecție al dreptei $x_1 y_1$ cu scara Cz (fig. 123).

— Se dă $z_2 = 11,8$, $x_2 = 8,9$; cateta $y_2 = 7,7$ se citește pe scara By în punctul de intersecție al dreptei $x_2 z_2$ cu această scară.

5. *Nomogramele cu scări paralele neechidistante.* Aceste nomograme ne permit să nomografiem o ecuație de forma:

$$Z = \frac{nX + mY}{m + n}.$$

Pentru a realiza o astfel de nomogramă, se construiesc dreptele $AX \parallel BY \parallel CZ$, astfel încît $||AC|| = m$, $||BC|| = n$ (fig. 124, a).

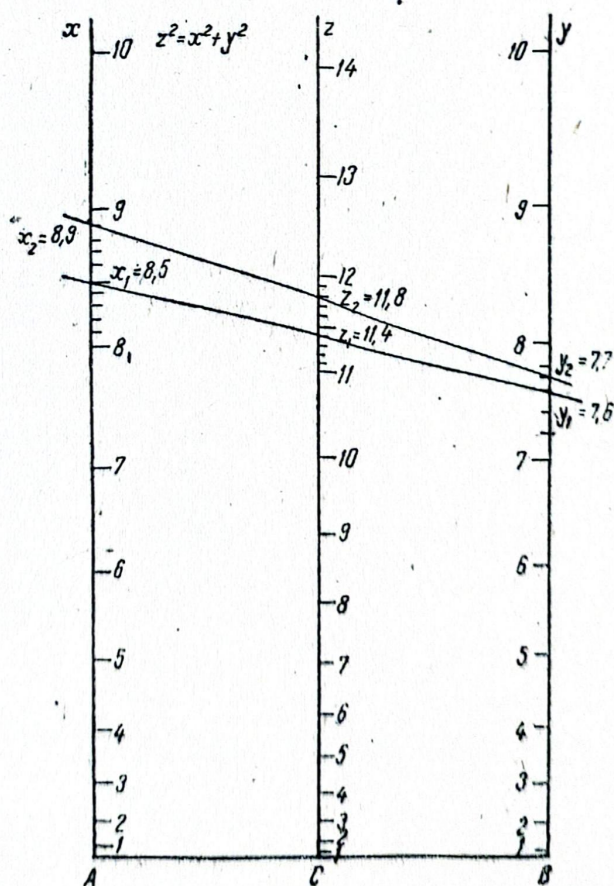
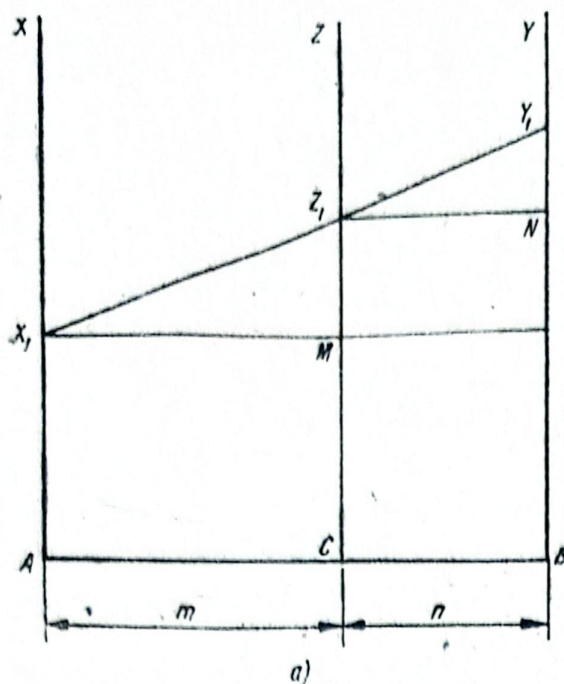


Fig. 123.



O dreaptă oarecare taie aceste scări în X_1 , Y_1 , Z_1 .
Notînd :

$$\|AX_1\| = X,$$

$$\|BY_1\| = Y,$$

$$\|CZ_1\| = Z$$

din

$$\triangle X_1MZ_1 \sim \triangle Z_1NY_1$$

obținem :

$$\frac{\|MZ_1\|}{\|NY_1\|} = \frac{\|MX_1\|}{\|NZ_1\|},$$

$$\frac{Z - X}{Y - Z} = \frac{m}{n},$$

$$Z = \frac{nX + mY}{m + n}.$$

Această formulă permite să se calculeze media aritmetică a două numere X , Y ponderate cu numerele n și m .

Exemple : 1. La o fermă agricolă s-au obținut următoarele recolte 46 q la ha pe un lot de 22 ha și 68 q la ha pe un lot de 35 ha. Care este recolta medie la hectar provenită din cele două loturi?

Recolta medie la hectar Z , se obține calculînd media aritmetică a recoltelor la hectar ponderată cu numărul hectarelor celor două loturi :

$$Z = \frac{22 \cdot X + 35 \cdot Y}{22 + 35},$$

unde

$$X = 46, \quad Y = 68.$$

Pentru această formulă se construiește o nomogramă cu scări paralele și neechidistante, luînd : $m = 35$ mm și $n = 22$ mm ; deci pe seg-

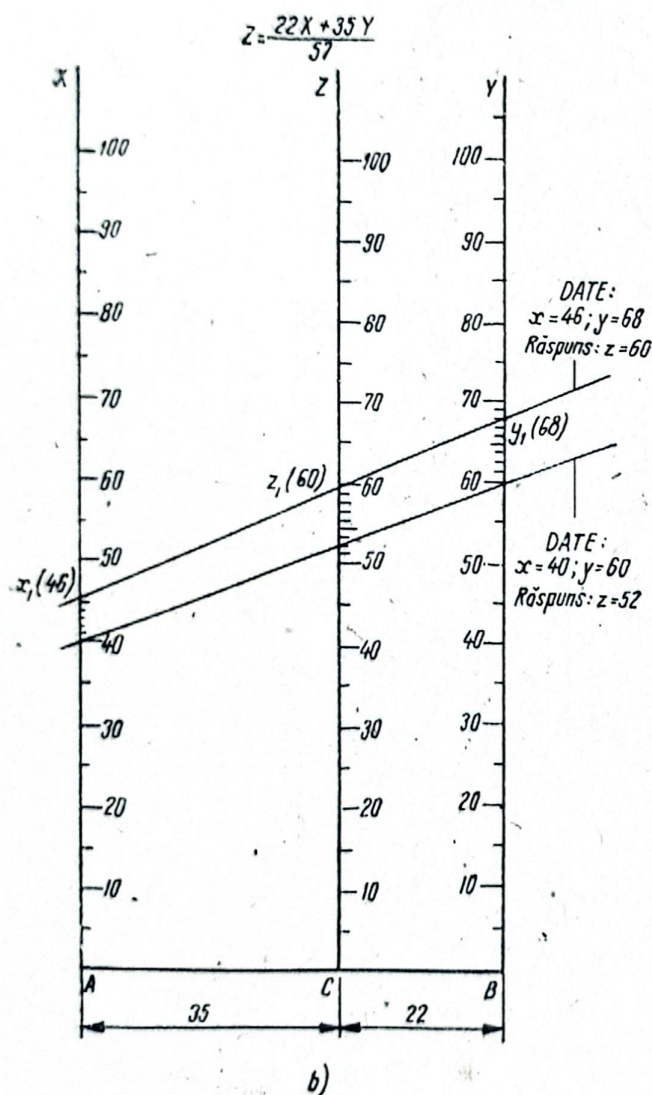


Fig. 124.

mentul $\|AB\| = m + n = 57$ mm se ia : $\|AC\| = 35$ mm, $\|CB\| = 22$ mm și se duce $AX \parallel BY \parallel CZ$. Comparând expresia lui Z cu (1) obținem :

$$X = x, Y = y, Z = z \text{ și deci : } z = \frac{22x + 35y}{22 + 35}.$$

Gradația celor 3 scări se va face direct în milimetri. Modulul folosit este 1 (1 mm corespunde unei unități).

Valoarea lui z_1 se citește direct pe scara Cz în punctul de intersecție a acestei scări cu dreapta x_1y_1 . Se va găsi $z_1 = 60$ g. Valoarea exactă este 59,5 g. Eroarea este sub 1% (fig. 124, b).

2. Să se nomografieze formula :

$$S = 2\pi Rh,$$

care ne dă aria laterală a unui cilindru, în funcție de raza bazei și înălțimea cilindrului.

Aplicând logaritmi, se obține :

$$\lg S = \lg 2\pi + \lg R + \lg h$$

sau

$$\frac{\lg S - \lg 2\pi}{2} = \frac{\lg R + \lg h}{2}.$$

Comparând cu expresia :

$$Z = \frac{X + Y}{2}$$

rezultă :

$$X = \lg R, Y = \lg h,$$

$$Z = \frac{\lg S - \lg 2\pi}{2}.$$

Deci, pentru formula dată se poate construi o nomogramă cu puncte aliniate și scări echidistante, deoarece $m = n = 1$.

Gradația scărilor. Dând lui R și h valori întregi de la 1 la 10, se calculează pentru X și Y logaritmi ai acestor numere. Pentru a grada scara valorilor lui Z va trebui să se dea lui S valori mai mari decât 2π , pentru ca Z să rezulte pozitiv.

Folosind tabelele de logaritmi, se gradează scara valorilor lui R , h și S . Luând ca unitate de măsură 1 dm, se obține pentru $R = h = 10$ dm, $X = Y = 1$ dm. Scările lui R și h fiind identice, se poate întocmi pentru ele o singură tabelă.

R (sau h)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X (sau Y)	0	0,3	0,47	0,60	0,7	0,78	0,84	0,90	0,95	1

S	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	300	400	500
Z	0,1	0,185	0,25	0,33	0,4	0,45	0,49	0,52	0,55	0,58	0,6	0,75	0,84	0,9	0,95

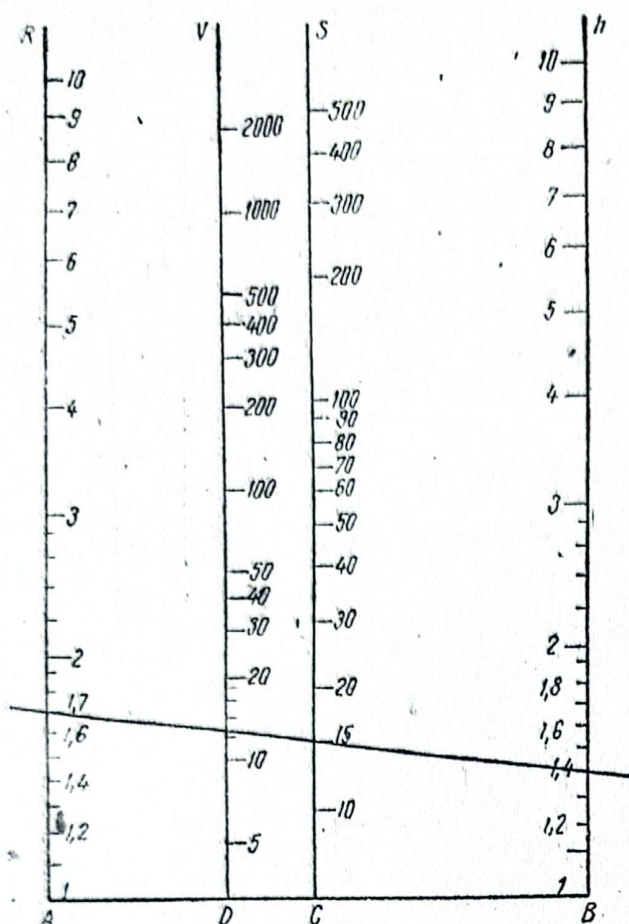


Fig. 125.

Aplicație: Un cilindru are $R = 1,7$ dm, $h = 1,4$ dm; se cere aria lui laterală.

Răspunsul se citește direct pe nomograma din figura 125: $S = 15$ dm². Rezultatul exact este 14,94 dm²; eroarea este de 0,4%.

Folosind același procedeu, putem nomografa și formula care dă volumul aceluiași cilindru cu raza bazei R și înălțimea h :

$$V = \pi R^2 h.$$

Dacă logaritmăm, obținem:

$$\lg V = \lg \pi + 2 \lg R + \lg h$$

sau

$$\frac{\lg V - \lg \pi}{3} = \frac{2 \lg R + \lg h}{3},$$

serisă sub această formă și comparată cu:

$$Z = \frac{nX + mY}{n + m}$$

se constată că se poate construi pentru formula volumului o nomogramă cu puncte aliniate și scări paralele neechidistante, luând $m = 1$, $n = 2$, $X = \lg R$, $Y = \lg h$, $Z = \frac{\lg V - \lg \pi}{3}$.

S-a construit această nomogramă pe scheletul nomogramei precedente ($S = 2\pi Rh$), deoarece scările lui R și h sînt identice. Pentru a construi scara lui V , se împarte segmentul $|AB|$ (fig. 125) în trei părți egale, se ia $\|BD\| = 2\|AD\|$ deoarece $\|AD\| = m = 1$ și $\|BD\| = n = 2$ și apoi se ridică în D perpendiculara $|DV|$. Gradația scării lui V s-a realizat dînd lui V valori de la 5 la 2000.

V	5	10	20	30	40	50	100	200	300	400	500	1 000	2 000
Z	0,067	0,167	0,268	0,327	0,368	0,40	0,50	0,60	0,66	0,70	0,734	0,834	0,935

Aplicație: Pentru $R = 1,7$ dm, $h = 1,4$ dm, se obține $V = 12,7$ dm³.

În acest mod, nomograma din figura 125 ne permite să determinăm simultan aria laterală și volumul unui cilindru cînd se dă raza bazei R și înălțimea h , economisind astfel timpul necesar executării celor 6 operații de înmulțire, necesare calculării lui S și V cu formulele respective.

3. Să se nomografieze formula care ne dă produsul a două numere:

$$z = x \cdot y. \quad (1)$$

Dacă se aplică logaritmul, formula (1) se poate scrie sub forma:

$$\frac{\lg z}{2} = \frac{\lg x + \lg y}{2}, \quad (2)$$

și notînd:

$$\lg x = X, \lg y = Y, \frac{\lg z}{2} = Z,$$

formula (2) se va scrie sub forma:

$$Z = \frac{X + Y}{2},$$

pentru care se poate construi o nomogramă cu puncte aliniate, scări paralele echidistante și cu gradații logaritmice. Dînd lui x, y, z , valorile 1; 1,1; 1,2; ...; 2; 3; 4; ...; 10, s-a întocmit tabela următoare:

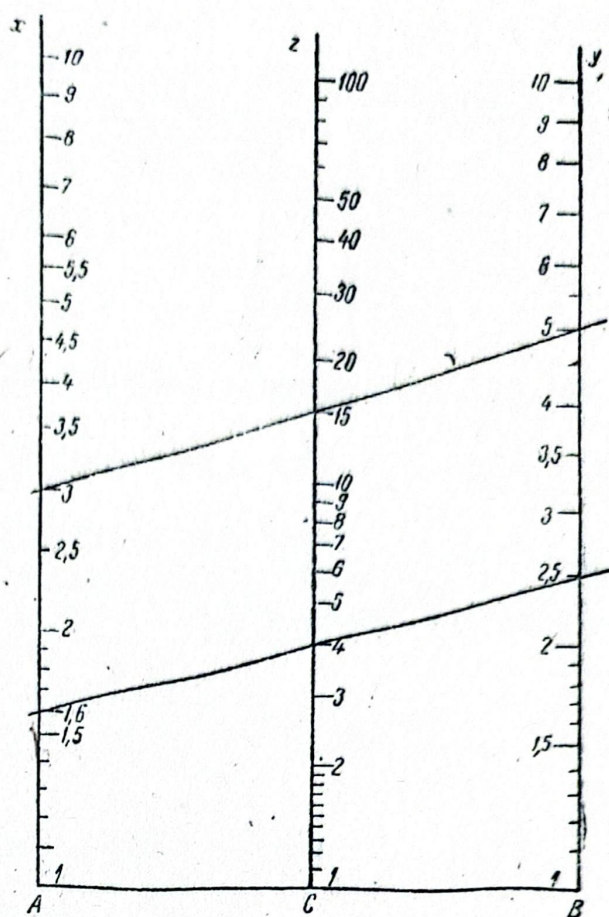


Fig. 126.

x, y, z	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
X, Y	0	0,04	0,08	0,114	0,146	0,176	0,204	0,23	0,255	0,279
Z	0	0,02	0,4	0,057	0,073	0,088	0,102	0,115	0,127	0,14

2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,3	0,47	0,6	0,7	0,78	0,84	0,9	0,99	1
0,15	0,235	0,3	0,35	0,39	0,42	0,45	0,475	0,5

cu ajutorul căreia se gradează cele trei scări x, y, z ale nomogramei din figura 126.

Aplicație: Pentru a înmulți numerele $x_1 = 1,6$ și $y_1 = 2,5$, rezultatul $z_1 = 4$ se va citi direct pe scara lui z , la intersecția acestei scări cu dreapta $x_1 y_1$ (fig. 126).

Observație: Aceeași nomogramă (fig. 126) servește și la efectuarea împărțirilor. În acest scop vom scrie formula (1) sub forma:

$$x = \frac{z}{y};$$

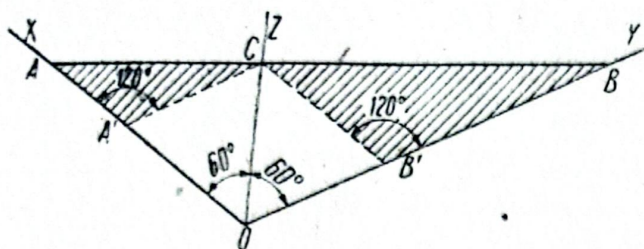


Fig. 127.

$= 60^\circ$ (fig. 127). Secanta ABC determină pe aceste drepte segmentele

$$\|OA\| = X, \|OB\| = Y, \|OC\| = Z.$$

Dacă se duce: $|CB'| \parallel |OX|$ și $|CA'| \parallel |OY|$ se formează triunghiurile echilaterale egale $OA'C$ și $OB'C$, precum și triunghiurile asemenea, $AA'C$ și $CB'B$, din care rezultă:

$$\frac{\|A'A\|}{\|CB'\|} = \frac{\|A'C\|}{\|B'B\|};$$

cum

$$\|A'A\| = \|AO\| - \|A'O\| = X - Z,$$

$$\|CB'\| = \|OC\| = Z,$$

$$\|A'C\| = \|OC\| = Z,$$

$$\|B'B\| = \|OB\| - \|OB'\| = Y - Z,$$

proporția de mai sus devine:

$$\frac{X - Z}{Z} = \frac{Z}{Y - Z}$$

$$(X - Z)(Y - Z) = Z^2,$$

$XY = XZ + YZ$, $\frac{1}{Z} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$, relație care arată că o astfel de nomogramă poate servi pentru calculul distanței focale f din ecuația oglinzilor concave sau a rezistenței echivalente R a unui circuit în care avem montate în paralel două rezistențe R_1 și R_2 .

În general, o astfel de nomogramă permite rezolvarea unei ecuații de forma: $XY = XZ + YZ$, când două din cele trei variabile X , Y , Z sînt date.

Dacă X și Y sînt cunoscute, Z se va afla din formula:

$$Z = \frac{X \cdot Y}{X + Y}.$$

Pentru gradația celor 3 scări se ia $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, deci gradația va fi uniformă. Pentru o precizie mai mare a rezultatelor s-a luat mo-

pentru $z_1 = 4$ și $y_1 = 2,5$ se va găsi $x_1 = 1,6$ la intersecția dreptei $z_1 y_1$ cu scara lui x .

7. Nomograme cu puncte aliniate și scări concurente

Se construiesc dreptele OX, OY, OZ , care fac între ele

unghiuri de 60° ; $\widehat{XOZ} = \widehat{ZOY} =$

pe aceste drepte segmentele

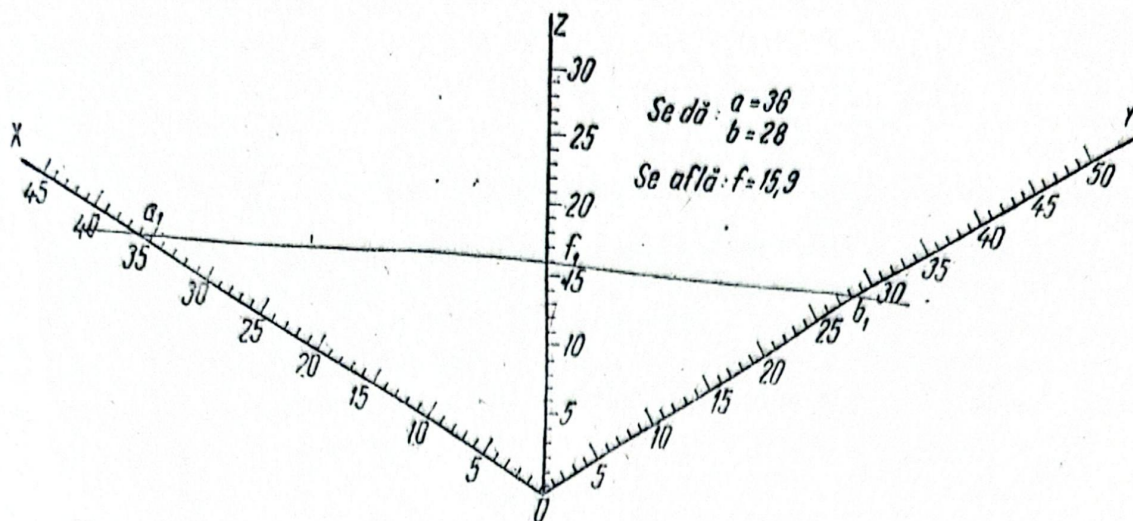


Fig. 128.

dulul 2, adică la fiecare 2 mm corespunde o unitate. Astfel s-a gradat nomograma din figura 128.

Aplicație: Se dă distanța obiectului $a_1 = 36$ cm, distanța imaginii $b_1 = 28$ cm; se cere distanța focală f_1 , știind că este dată de formula:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Folosind nomograma din figura 128 se va găsi $f_1 = 15,9$ cm, care se poate citi direct pe scara OZ la intersecția ei cu dreapta a_1b_1 . Valoarea exactă a lui f_1 calculată cu formula:

$$f_1 = \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1}$$

este de 15,75 cm; eroarea este sub 1%.

3. Nomograme cu scară oblică

Printre nomogramele cu puncte aliniate sînt și nomogramele cu scară oblică, cunoscute și sub numele de nomograme în „N”.

O nomogramă în „N” se compune din două scări paralele $AD \parallel CB$ și o scară oblică rectilinie AB , care unește vîrfurile opuse ale celor două scări paralele (fig. 129).

Aceste nomograme servesc pentru calculul unui produs sau al unui cît de două funcții.

Dacă se notează: $\parallel AL \parallel = X$, $\parallel CB \parallel = a$, $\parallel AB \parallel = b$, $\parallel CN \parallel = Y$, $\parallel AM \parallel = Z$, din triunghiurile asemenea ALM și MBN se obține:

$$\frac{\parallel AL \parallel}{\parallel NB \parallel} = \frac{\parallel AM \parallel}{\parallel MB \parallel},$$

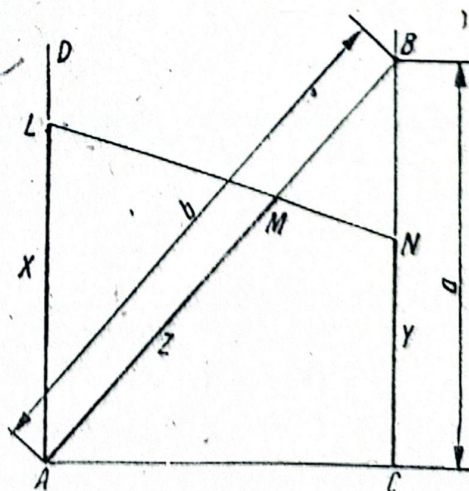


Fig. 129.

sau

$$\frac{X}{a - Y} = \frac{Z}{b - Z}, \quad X = \frac{Z}{b - Z} (a - Y),$$

formulă care servește la construirea nomogramelor în „N”.

Exemple: 1. Nomogramă pentru ecuația compresoarelor. Compresorul este o mașină care servește la comprimarea diferitelor gaze. Dacă comprimăm un gaz, el își mărește presiunea și își micșorează volumul. Dacă avem o compresiune izotermă (fără variație de temperatură), atunci produsul dintre volumul v al gazului și presiunea lui p este constant. În acest caz se aplică legea lui Boyle-Mariotte:

$$p \cdot v = \text{const.}$$

În practică, compresiunea produce căldură și deci legea lui Boyle-Mariotte nu se mai poate aplica. Pe de altă parte, căldura produsă nu poate rămâne în întregime în gaz, o parte din ea se pierde prin radiație. De aceea, în practică, compresiunea se face după formula:

$$p \cdot v^n = \text{const.}$$

și se numește politropă. Exponentul n ia valori cuprinse între $n = 1$ și $n = k$, care corespund unei compresiuni adiabatice (gazul nu cedează și nu absoarbe căldura), pentru aer $1 < n \leq 1,4$.

Cunoscând aceste noțiuni, se poate rezolva următoarea problemă:

Intr-un compresor, aerul este comprimat de la 1 la 10 atmosfere. Să se calculeze de câte ori se va micșora volumul, știind că $n = 1,2$.

Va trebui să se construiască o nomogramă pentru formula:

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n.$$

Se scrie această relație sub forma:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^n,$$

Logaritmînd:

$$\lg \frac{p_1}{p_2} = n \cdot \lg \frac{v_2}{v_1}.$$

Dacă se notează pentru prescurtare:

$$\lg \frac{p_1}{p_2} = P, \quad \lg \frac{v_2}{v_1} = V,$$

relația de nomografiat devine:

$$V = P \cdot \frac{1}{n}.$$

Pentru a grada scările nomogramei cît mai convenabil, se vor folosi două module p și q .

Formula generală a nomograme-
lor în „N” se va scrie:

$$p \cdot q \cdot X = \frac{p \cdot Z}{b - Z} \cdot q(a - Y)$$

și, comparînd cu expresia lui V , re-
zultă:

$$V = p \cdot qX,$$

$$p = \frac{pZ}{b - Z}, \quad \frac{1}{n} = q(a - Y).$$

S-a luat distanța dintre cele
două scări paralele $\parallel AC \parallel = 7,5$ cm;
 $a = 18$ cm, de unde rezultă (fig. 130).

$$b = \sqrt{7,5^2 + 18^2} = 19,5 \text{ cm},$$

$$p = 2, \quad q = \frac{1}{18};$$

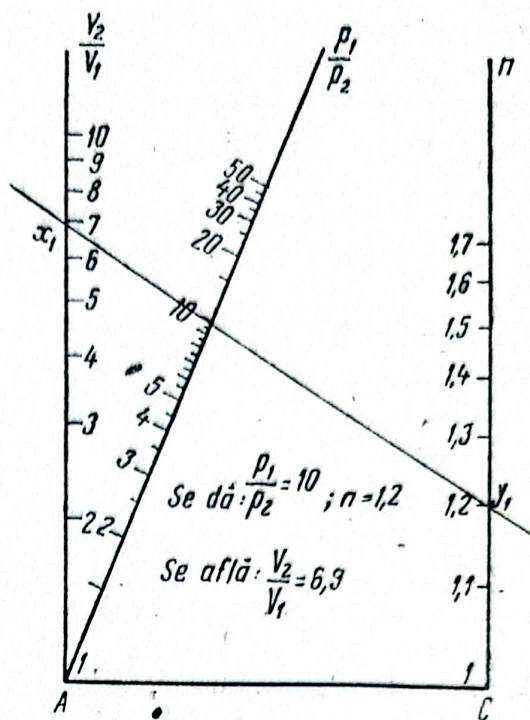


Fig. 130.

Folosind aceste valori pentru a, b, p, q , se obține:

$$X = 9V, \quad Y = 18 - \frac{18}{n}, \quad Z = \frac{19,5 \cdot P}{2 + P}.$$

Cu ajutorul acestor formule și ținînd seama de valorile lui P și V ,

$$P = \lg \frac{p_1}{p_2}, \quad V = \lg \frac{v_2}{v_1},$$

se pot grada cele 3 scări $\frac{v_2}{v_1}$, n și $\frac{p_1}{p_2}$.

Folosind această nomogramă (fig. 130), răspunsul la problema propusă
se poate citi direct pe scara lui $\frac{v_2}{v_1}$, în punctul de intersecție a acestei
scări cu dreapta Y_1Z_1 , $Y_1(1, 2)$, $Z_1(10)$. Se găsește $\frac{v_2}{v_1} = 6,9$; deci, în urma
compresiunii de la 1 la 10 atmosfere, volumul gazului se va reduce de 6,9 ori.

Observație: Calculul exact al raportului $\frac{v_2}{v_1}$ se poate face cu ajutorul
formulei:

$$\lg \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{n} \cdot \lg \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{1,2} \cdot \lg 10 = \frac{1}{1,2} = 0,83333, \quad \frac{v_2}{v_1} = 6,82.$$

Eroarea este 1,2%, deci acceptabilă în practică.

De remarcat este faptul că obținerea rezultatului prin calcul este destul
de laborioasă, deoarece necesită, în afară de operațiile de scădere și înmul-
țire, două operații de logaritmare și antilogaritmare.

2. În munca de evidență statistică industrială, nomogramele se folosesc cu succes pentru calcularea și stabilirea rezultatelor necesare analizei indicatorilor care privesc *utilizarea mijloacelor fixe, a mijloacelor circulante și a forței de muncă a întreprinderilor.*

Mijloacele fixe ale unei întreprinderi se compun din mașini-unelte, mașini de transport, diferite instalații fixe, inclusiv clădirile în care sînt instalate și care sînt folosite în mod direct sau indirect la realizarea producției.

Mijloacele fixe se consumă numai parțial în timpul unui ciclu de producție (adică în timpul realizării unității de produs).

Acest consum se explică prin uzura mijlocului fix, datorită utilizării lui în procesul de producție¹.

Mijloacele circulante se compun din materii prime și materiale, combustibili, lubrifianți, precum și alte produse care se consumă în timpul producției, își pierd forma lor naturală și transferă integral valoarea lor noului produs. Sursa bănească necesară formării mijloacelor circulante se numește fond de rulant. Dintre indicatorii utilizării mijloacelor fixe ale unei întreprinderi, un rol important îl joacă *coeficientul procentual al utilizării extensive a utilajului*, U_e , care se calculează cu formula:

$$U_e = \frac{T_e}{T_c} \cdot 100\%, \quad (1)$$

în care:

T_e este timpul de funcționare efectivă a utilajului în decurs de un an și se exprimă în zile;

T_c — fondul de timp calendaristic exprimat în zile.

Pentru a nomografia formula (1), se scrie sub forma:

$T_e = T_c \cdot \frac{U_e}{100}$ și se compară cu formula generală pentru construirea nomogramelor în „N”:

$$X' = \frac{Z}{b - Z} \cdot (a - Y). \quad (2)$$

Rezultă:

$$T_e = X, \quad T_c = a - Y, \quad \frac{U_e}{100} = \frac{Z}{b - Z}.$$

Dacă se ia $\|AB\| = 60$ mm, $\|BC\| = 80$ mm, $\|AC\| = b = 100$ mm, se obține:

$$X = T_e, \quad Y = 80 - T_e, \quad Z = \frac{100 U_e}{100 + U_e}.$$

¹ Suma de bani necesară înlocuirii mijloacelor se numește amortisment. Fiecare întreprindere își prevede anual în planul de cheltuieli sumele amortizării mijloacelor fixe.

Ținând seama că valoarea maximă a indicatorului T_e este 360 (numărul zilelor dintr-un an), s-a ales modulul $\frac{2}{9}$, adică unui milimetru de pe gradația scării îi corespund $\frac{9}{2}$ unități. În acest mod, pentru 80 mm vor corespunde $80 \times 4,5 = 360$ unități.

Folosind acest modul, s-au gradat cele 3 scări ale nomogramei fig. 131).

Aplicație: În cadrul unei întreprinderi din industria chimică anorganică, o secție de sodă calcinată a lucrat 250 de zile din totalul fondului de timp calendaristic de 360 de zile. Care este coeficientul utilizării extensive a utilajului?

Se dă: $T_e = 360$, $T_e = 250$; se cere U_e .

Rezultatul $U_e = 69\%$ se citește direct pe scara lui U_e , în punctul de intersecție al acestei scări cu dreapta X_1Y_1 (fig. 131).

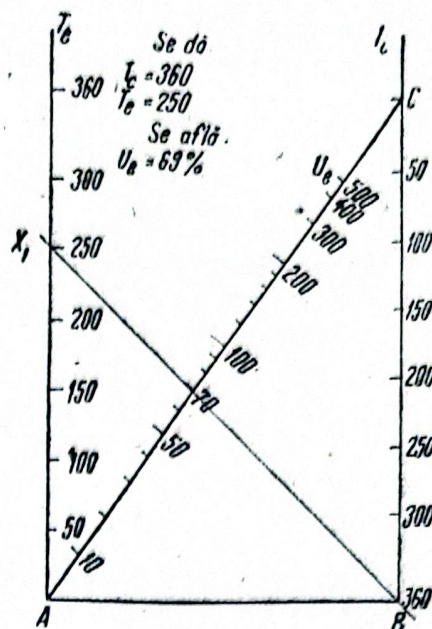


Fig. 131.

Probleme propuse

1. Să se nomografieze formula: $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 h$, care dă volumul conului de rază r și înălțime h .

2. Să se nomografieze formula $V = 2\pi^2 r^2 R$, care dă volumul unui tor, avînd secțiunea circulară de rază r și raza torului R (fig. 132, a).

3. Să se nomografieze formula $S = \pi^2 \cdot D \cdot d$, care dă suprafața torului (fig. 132, a).

4. Să se nomografieze formula $V = \frac{2\pi}{3} \cdot r^2 h$, care dă volumul sectorului sferic de rază r și înălțime h (fig. 132, b).

5. Să se nomografieze formula $V = \frac{2}{3} r^2 h$, care ne dă volumul unei copite cilindrice (se obține făcînd într-un cilindru o secțiune cu un plan care trece printr-un diametru al bazei și face cu baza un unghi α dat de relația: $\tan \alpha = \frac{h}{r}$ (fig. 132, c).

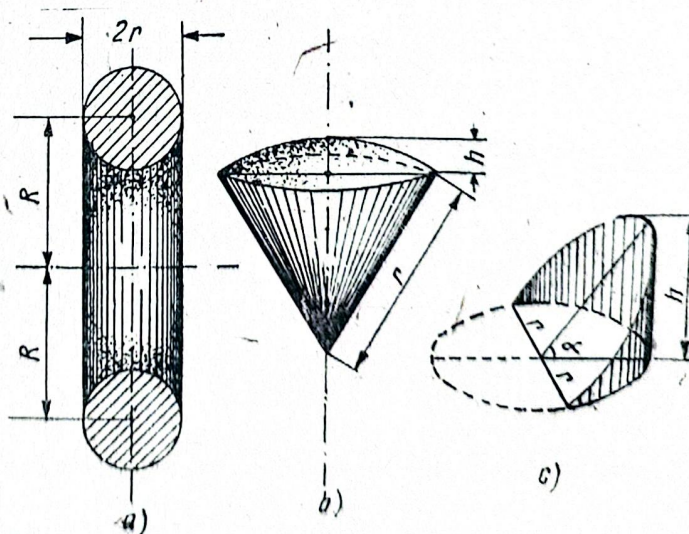


Fig. 132.

Indicație : Se va folosi formula generală a nomogramelor în „N” sau formula pentru nomografierea expresiilor de forma :

$$Z = \frac{nX + mY}{m + n},$$

după ce, în prealabil, se vor aplica logaritmiile formulelor date.

Pentru nomografierea formulei de la problema 5 se va scrie $\lg V + \lg 3 - \lg 2 = 2 \lg r + \lg h$,

$$Z = \frac{\lg V + \lg 3 - \lg 2}{3}, \quad X = \lg r, \quad Y = \lg h, \quad n = 2, \quad m = 1.$$

CAPITOLUL IX.

PROGRAMARE LINIARĂ

Introducere. Procesul de automatizare a producției, care se dezvoltă într-un ritm din ce în ce mai intens în toate ramurile economiei naționale din țara noastră, a început să se extindă în ultimul deceniu și la problemele de planificare și evidență statistică.

Întocmirea unui plan tehnico-economic cât mai apropiat de posibilitățile efective de realizare, necesită o muncă laborioasă și o pricepere deosebită mai ales din cauza numărului mare de indicatori ce concură în mod direct sau indirect la realizarea lui și a interdependenței ce există între ei.

La elaborarea unui plan trebuie să se țină seama de toți factorii ce pot influența indicatorii de bază ai planului, mobilizând la maximum toate resursele materiale de care dispunem, utilizând în acest scop cuceririle cele mai avansate ale tehnicii moderne.

Activitatea depusă pentru realizarea unui plan de producție trebuie astfel organizată încât să conducă la obținerea producției într-un timp cât mai scurt (cu o productivitate maximă) cu minimum de cheltuieli (la un preț de cost cât mai redus) menținând în același timp calitatea produselor și numărul sortimentelor prevăzute în plan. Numai atunci rentabilitatea și beneficiul vor crește mărind astfel fondul de acumulări socialiste, atât de necesar dezvoltării economiei noastre naționale.

Un prim pas pentru realizarea acestui scop, îl constituie aplicarea metodelor statisticii matematice în general și a „programării liniare” în special.

Apărută acum 35 de ani ca o ramură a statisticii matematice, „programarea liniară” s-a dezvoltat necontenit, generând capitole noi cu multiple aplicații în practică.

Printre acestea cităm: programarea pătratică, hiperbolică, polinomială, exponențială, logaritmică, în numere întregi, stohastică, parametrică, dinamică, programare liniară tridimensională etc.

O problemă de programare liniară poate conduce adesea la o planificare optimă a producției în condițiile unor resurse limitate.

Exemplu. O întreprindere are la dispoziție mai multe resurse (materii prime, materiale, mașini-unelte, forțe de muncă, resurse financiare etc.). Fie $b_1, b_2, \dots, b_m$ cantitățile disponibile din aceste resurse.

Folosind aceste resurse, întreprinderea trebuie să realizeze n produse diferite. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ cantitățile din aceste produse ce urmează a fi realizate și pe care nu le cunoaștem.

Dacă notăm cu a_{ij} cantitatea din resursa i , ($i = 1, 2, \dots, m$) necesară realizării unei unități din produsul j , ($j = 1, 2, \dots, n$), atunci:

- cantitatea din resursa i necesară realizării cantității x_j va fi $a_{ij}x_j$;
- cantitatea totală din resursa i necesară realizării tuturor celor n produse va fi: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$.

Cum această cantitate nu poate depăși cantitatea b_i de care dispunem, apare în mod necesar condiția:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Cantitățile $x_1, x_2, \dots, x_n$ din cele n produse nu pot fi decât pozitive sau zero:

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Dacă notăm cu c_j prețul de cost pe unitate de produs, atunci costul total al celor n produse va fi:

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (3)$$

Dacă înlocuim costul c_j cu beneficiul e_j realizat de o unitate din produsul j , atunci funcția (3) devine:

$$B = e_1x_1 + e_2x_2 + \dots + e_nx_n \quad (4)$$

și reprezintă beneficiul total ce va fi realizat de acea întreprindere. În acest caz, se pune problema de a întocmi un plan de producție, adică de a determina cantitățile $x_1, x_2, \dots, x_n$ astfel încât funcția (4) să-și atingă valoarea sa maximă, iar condițiile (1) și (2) să fie satisfăcute.

Din mulțimea problemelor practice ce se pot rezolva prin metodele programării liniare, vom mai cita câteva:

- folosirea optimă a capacității de producție a secțiilor unei întreprinderi, ținând seama de numărul, tipul și productivitatea mașinilor-unelte și a celorlalte utilaje existente;

- decuparea optimă a materialelor sub diferite forme (bare, foi etc.) în scopul reducerii la maximum a deșeurilor;

- stabilirea poziției de amplasare a unor depozite, a unor magazii de scule, a unor betoniere, în incinta unei fabrici sau a unor șantiere; astfel încât, ținând seama de poziția centrelor de distribuție, a centrelor de consum și a numărului de transporturi efectuate în unitatea de timp (de exemplu pe zi), distribuția să se facă cu un minim de lucru mecanic, sau într-un timp total minim;

- întocmirea unui plan de transport pentru unele produse omogene (materii prime, materiale de construcții, bunuri de larg consum etc.) de la centrele de producție unde aceste produse sînt disponibile, la centrele de consum unde ele sînt necesare;

- stabilirea poziției de amplasare a conductelor de gaz sau de petrol, a unei conducte electrice de înaltă tensiune, astfel ca suma distanțelor de la punctele de deservire (consum) să fie minimă;

— întocuirea unui plan optim de repartizare a mijloacelor de transport existente într-un număr restrâns de centre, în raport cu nevoile de efectuare a unor transporturi de mărfuri (exemplu dirijarea vagoanelor goale din stațiile mari, în stațiile unde urmează a fi încărcate), astfel încît parcursul gol al vagoanelor de marfă să fie redus la minim ;

— întocmirea unui plan pentru transportul unor mari cantități de pământ, în scopul amenajării unor terenuri plane, cu un consum minim de moto. km sau moto. ore;

— stabilirea rației furajere optime la animale, adică determinarea cantităților diferitelor furaje ce trebuie să intre în compunerea unei rații zilnice, astfel încât principiile nutritive să fie respectate, iar costul rației să fie minim;

— repartizarea culturilor pe grupe de fertilitate, astfel încît, ținînd seama de producția medie și de cheltuielile ce revin la ha, planul de producție să se realizeze cel puțin în cantitățile prevăzute la fiecare cultură, cu un total minim de cheltuieli (sau cu un beneficiu total maxim);

— repartizarea optimă a parcului de tractoare și mașini agricole de diferite tipuri, astfel încât, ținând seama de numărul și productivitatea fiecărui tip de tractor pentru diferite munci agricole, întreaga activitate agricolă să se realizeze cu un număr minim de tractoare (sau cu un total minim de cheltuieli);

— întocmirea unui plan optim de repartitie a îngrășămintelor chimice, ținând seama de felul culturii, gradul de fertilitate a diferitelor categorii de soluri, suprafețele corespunzătoare și de cantitatea totală de îngrășă-minte existentă (ce va fi livrată conform planului în perioada respectivă):

— întocmirea unui plan optim de fabricație pentru mai multe produse care urmează a fi prelucrate la un număr oarecare de mașini, astfel încît ciclul total de fabricație să fie minim (reducînd la minim întreruperile în timpul funcționării mașinilor, precum și timpul de așteptare a produselor ce urmează a fi prelucrate).

§ 1. Modelul matematic al unui program liniar

Definiție. O problemă de programare liniară (sau program liniar) se poate enunța astfel:

Să se determine numerele $x_1, x_2, \dots, x_n$ care să maximizeze o funcție liniară¹ de forma:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (1)$$

și să satisfacă condițiile:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{aligned} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; m \leq n \quad (3)$$

a, b, c fiind numere reale date.

¹ O funcție $f(x)$ este liniară dacă verifică relația :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y); \text{ unde } \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n); y = (y_1, y_2, \dots, y_\alpha).$$

Funcția (1) a cărei maxim se cere se numește *funcție obiectiv* (scop, criteriu, de eficiență, de optimizat etc.). Sistemul de inecuații (2) reprezintă *restricțiile problemei*, iar (3) se numesc *condiții de nenegativitate*¹.

Relațiile (1), (2), (3) care reprezintă modelul matematic al unei probleme de programare liniară se pot scrie și sub forma prescurtată:

$$\begin{aligned} \max \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

În cazul în care se cere minimul funcției f , restricțiile trebuie satisfăcute cu semnul $\geq$. Programul liniar va fi de forma:

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

Clasificarea soluțiilor

— Un sistem de n numere reale x_j ce satisfac (2) și (3) se numește *soluție admisibilă* (posibilă, realizabilă).

— Dacă printre cele n numere reale ce satisfac (2) avem și $x_j < 0$ (condițiile (3) nu sînt satisfăcute), soluția se numește *neadmisibilă* (nerealizabilă).

— Un sistem de m valori $x_j \geq 0$, și de $n - m$ valori $x_j = 0$, care verifică sistemul (2), se numește *soluție de bază admisibilă*.

— O soluție de bază admisibilă care conține m valori $x_j > 0$ și $n - m$ valori $x_j = 0$, se numește *soluție de bază admisibilă nedegenerată*.

— O soluție admisibilă care conține $m - r$ valori $x_j > 0$, se numește *soluție de bază admisibilă degenerată* ($r \geq 1$, se numește ordinul de degenerare²).

— O soluție de bază admisibilă pentru care funcția obiectiv devine maximă (sau minimă) se numește *soluție optimă*.

Forma standard a unui program liniar.

Sistemul de inecuații (care reprezintă restricțiile problemei) poate fi transformat într-un sistem de ecuații cu ajutorul unor *variabile ecart* (auxiliare, de compensare, de abatere).

¹ În problemele practice de programare liniară, soluțiile care conțin valori $x_j < 0$, sînt lipsite de sens.

² Pentru $r = 1, 2, \dots$, vom spune că avem o degenerare simplă, dublă, ..., multiplă de ordinul r .

File :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$$

un astfel de determinant. Sistemul (1) se poate scrie sub forma :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 - (a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 - (a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= b_m - (a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n) \end{aligned} \quad (I')$$

în care $x_1, x_2, \dots, x_m$ sînt necunoscutele principale, iar $x_{m+1}, \dots, x_n$ necunoscutele secundare ale sistemului.

Pentru a obține o soluție de bază a sistemului (1'), vom anula necunoscutele secundare, adică vom presupune:

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0.$$

Se obține astfel sistemul :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= b_m, \end{aligned} \quad (1'')$$

care este compatibil determinat deoarece am presupus $|A| \neq 0$. Dacă soluția acestui sistem $\bar{x}_j$; $j = 1, 2, \dots, m$, va conține numai valori $\bar{x}_j \geq 0$, ea va constitui o soluție de bază admisibilă.

Această soluție este:

- nedegenerată dacă conține m valori $\bar{x}_j > 0$;
- degenerată dacă conține $m - r$ valori $\bar{x}_j > 0$, celelalte fiind nule ($r \geq 1$).

Dacă toți determinanții de ordinul m ce se pot forma cu cele n coloane ale matricei A sînt diferiți de zero, se vor obține cel mult C_n^m soluții de bază (admisibile sau nu).

Rezultă că numărul maxim al soluțiilor de bază este C_n^m și se obțin din (1) anulând pe rînd cîte $n_i - m_i$ din cele n necunoscute.

Dacă vom determina în acest mod toate soluțiile de bază, iar pe acelea admisibile le vom introduce în funcția scop, vom ști care din ele este optimă (maximă sau minimă).

Acest mod de a determina soluția (soluțiile) optime constituie o metodă de rezolvare a programelor liniare, cunoscută sub numele de *metoda descrierii totale*.

Exemplu. Să se rezolve programul liniar :

$$\begin{aligned} f = x_1 + x_2 = \min \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 5 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Soluție. Introducând variabilele ecart x_3 și x_4 se obține programul liniar standard :

$$\begin{aligned} f &= x_1 + x_2 = \min \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_4 &= 2 \\ x_j &\geq 0; j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Cum $m = 2$; $n = 4$; vom avea cel mult $C_4^2 = 6$ soluții de bază. Anulând pe rând câte două din cele 4 necunoscute x_1, x_2, x_3, x_4 , se obțin cele 6 soluții de bază trecute în tabela :

Nr. crt.	Baza	x_1	x_2	x_3	x_4	f	natur asoluției
1	x_1x_2	1/2	1	0	0	3/2	minimă
2	x_1x_3	1	0	-4	-0	—	neadmisibilă
3	x_1x_4	5/2	0	0	3	5/2	maximă
4	x_2x_3	0	2	3	0	2	admisibilă
5	x_2x_4	0	5/4	0	-3/4	—	neadmisibilă
6	x_3x_4	0	0	-5	-2	—	neadmisibilă

Se constată că 1, 3, 4 sînt soluții admisibile, dintre care 1 este minimă, iar 3 este maximă.

$$\min f = \frac{3}{2}, \text{ pentru } x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 1.$$

Celelalte soluții : 2, 5, 6 sînt soluții de bază neadmisibile.

Observație. Cînd m și n sînt mari, C_n^m crește foarte mult.

În problemele practice de programare liniară în care m și n sînt de ordinul zecilor, metoda descrierii totale devine foarte laborioasă și nu poate fi aplicată într-un timp rezonabil, chiar dacă am folosi mașini electronice de calcul perfecționate.

Dacă de exemplu, am avea $m = 10$; $n = 40$, ar trebui să rezolvăm $C_{40}^{10} = 847\,660\,528$ sisteme liniare de 10 ecuații cu 10 necunoscute, apoi să calculăm valoarea funcției scop ce corespunde tuturor soluțiilor admisibile.

§ 3. Interpretarea geometrică a programelor liniare

Pentru interpretarea geometrică vom considera următorul program liniar canonic cu două variabile :

$$\begin{aligned} \max (3x_1 + 2x_2) \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 & (1) \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 & (2) \\ 4x_1 - x_2 &\geq 5 & (3) \\ x_1 &\geq 0; x_2 &\geq 0. & (4) \end{aligned}$$

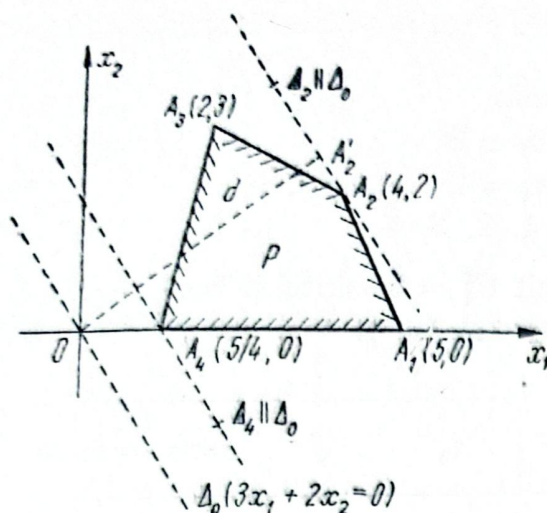


Fig. 133.

Într-un reper cartezian x_1Ox_2 construim dreptele:

$$2x_1 + x_2 = 10 \quad (A_1A_2)$$

$$x_1 + 2x_2 = 8 \quad (A_2A_3)$$

$$4x_1 - x_2 = 5 \quad (A_3A_4)$$

Folosind apoi teoremele cu privire la separarea planului în regiuni de către o dreaptă, stabilim regiunea din plan în care sînt verificate toate inecuațiile (1) ... (4).

Se obține poligonul convex $A_1A_2A_3A_4$. Fiecărui punct situat în interiorul și pe laturile lui îi corespunde o soluție admisibilă. Poligonul P astfel construit se mai numește și poligonul soluțiilor admisibile (fig. 133).

Ne propunem acum să determinăm din mulțimea soluțiilor admisibile, numai soluțiile admisibile de bază.

În acest scop, transformăm programul canonic într-un program standard, introducînd cîte o variabilă ecart în fiecare din cele 3 inecuații. Se obține următorul program liniar:

$$\begin{aligned} \max \quad & (3x_1 + 2x_2) \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \quad (1') \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \quad (2') \\ & 4x_1 - x_2 - x_5 = 5 \quad (3') \\ & x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, 5. \quad (4') \end{aligned}$$

Folosind metoda descrierii totale se determină mulțimea tuturor soluțiilor de bază. Cu $m = 3$, $n = 5$, se pot forma $C_n^m = C_5^3 = 10$ sisteme liniare de 3 ecuații cu 3 necunoscute.

În tabela de mai jos au fost trecute numai soluțiile de bază admisibile, precum și valorile corespunzătoare funcției scop.

Nr.	Baza	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Valoarea funcției scop
1	$x_1x_4x_5$	5	0	0	3	15	15
2	$x_1x_2x_5$	4	2	0	0	9	16 (max)
3	$x_1x_2x_3$	2	3	3	0	0	12
4	$x_1x_3x_4$	5/4	0	15/2	27/4	0	15/4(min)

Din datele obținute în tabelă și din figura 133 se constată că fiecărei perechi de valori (x_1, x_2) ce aparțin unei soluții de bază admisibile îi corespunde un vîrf al poligonului P și invers, fiecărui vîrf îi corespunde o pereche de valori (x_1, x_2) ce aparține unei soluții de bază admisibile.

Există deci o corespondență biunivocă între soluțiile de bază admisibile obținute în acest mod și vîrfurile poligonului P .

Pentru a determina acum $\max f$, să observăm că ecuația

$$3x_1 + 2x_2 - f = 0 \quad (5)$$

reprezintă un fascicul de drepte paralele cu dreapta

$$(\Delta_0) \quad 3x_1 + 2x_2 = 0,$$

iar distanța de la originea O a reperului la dreapta (5) este dată de formula :

$$d = \frac{|-f|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{f}{\sqrt{13}}; \quad f = \sqrt{13} \cdot d.$$

Rezultă că funcția scop devine maximă odată cu distanța d . Cum dreapta (5) trebuie să aibă cel puțin un punct comun cu poligonul P , vom deplasa dreapta Δ_0 paralel cu ea însăși pînă cînd va trece prin vîrf A_2 , cel mai depărtat de dreapta Δ_0 . Vîrf $A_2(4, 2)$ corespunde unui *maxim* :

$$\max f = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16; \quad \bar{x}_1 = 4; \quad \bar{x}_2 = 2.$$

Vîrf $A_4(5/4, 0)$ cel mai apropiat de dreapta Δ_0 corespunde unui *minim* :

$$\min f = 3 \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot 0 = \frac{15}{4}; \quad \bar{x}_1 = \frac{5}{4}; \quad \bar{x}_2 = 0.$$

În general, dacă poligonul soluțiilor admisibile este nevid și mărginit, funcția scop își atinge valoarea sa optimă (maximă sau minimă) în una din soluțiile admisibile de bază, adică într-un vîrf al poligonului P al soluțiilor.

Pentru a obține soluția optimă a unui program liniar care conține m inecuații cu două necunoscute adică are una din formule :

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 = \min; \quad f = c_1x_1 + c_2x_2 = \max.$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i; \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0;$$

procedăm astfel :

— construim poligonul convex P al soluțiilor admisibile definit de restricțiile problemei. Acest poligon va fi situat în cadranul întâi (deoarece $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$) și va avea cel mult p laturi ($p \leq m + 2$);

— construim dreapta $\Delta_0 : c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, ce trece prin originea reperului;

— deplasăm dreapta Δ_0 paralel cu ea însăși pînă întîlnește primul vîrf al poligonului P . Acest vîrf fiind cel mai apropiat de dreapta Δ_0 , coordonatele lui conduc la un minim al funcției scop (deoarece $\min f = k \cdot \min d$; $k = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$);

— deplasăm apoi dreapta Δ_0 paralel cu ea însăși pînă va trece prin vîrf A_2 cel mai depărtat de dreapta Δ_0 . Coordonatele lui conduc la un maxim al funcției scop (deoarece $\max f = k \cdot \max d$).

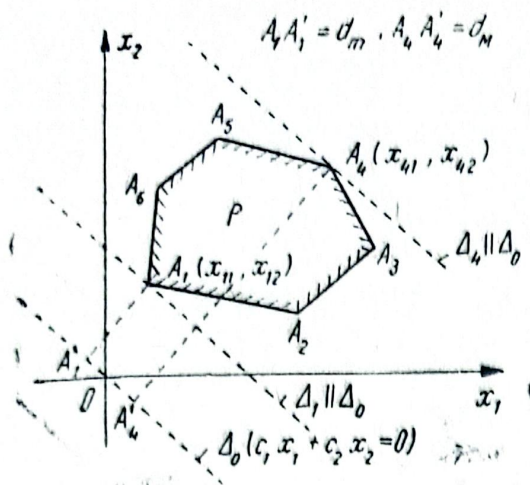


Fig. 134.

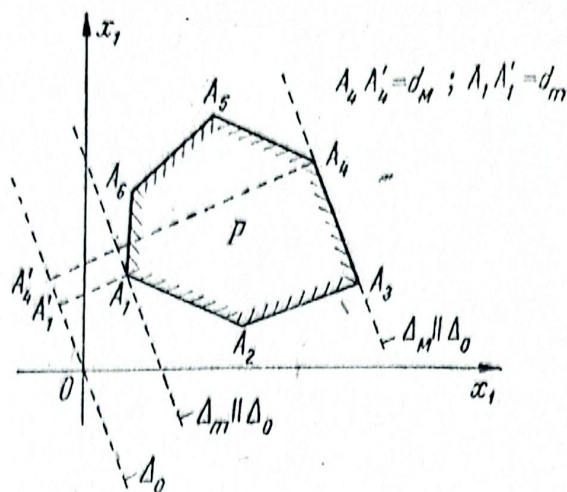


Fig. 135.

Situația se va prezenta ca în figura 134.

Vîrfurile $A_1(x_{11}, x_{12})$ corespunde unui minim :

$$\min f = c_1 x_{11} + c_2 x_{12}; A_1 A'_1 = d_m.$$

Vîrfurile $A_4(x_{41}, x_{42})$ corespunde unui maxim :

$$\max f = c_1 x_{41} + c_2 x_{42}; A_4 A'_4 = d_M.$$

— Dacă una din laturile poligonului P este paralelă cu dreapta Δ_0 , atunci vom avea satisfăcută una din relațiile :

$$\frac{c_1}{a_{i1}} = \frac{c_2}{a_{i2}}; \text{ pentru un } i = 1, 2, \dots, m.$$

În acest caz, problema poate admite :

- o infinitate de soluții de maxim și un minim (fig. 135);
- o infinitate de soluții de minim și un maxim (fig. 136);
- o infinitate de maxime și o infinitate de minime (fig. 137);

Mulțimea soluțiilor optime vor fi date de coordonatele tuturor punctelor situate pe acea latură a poligonului P care este paralelă cu dreapta Δ_0 .

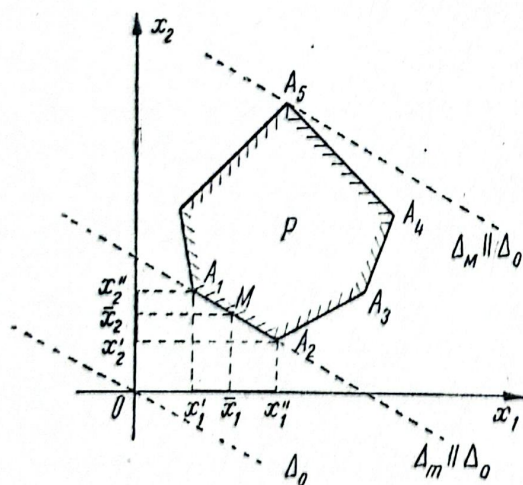


Fig. 136

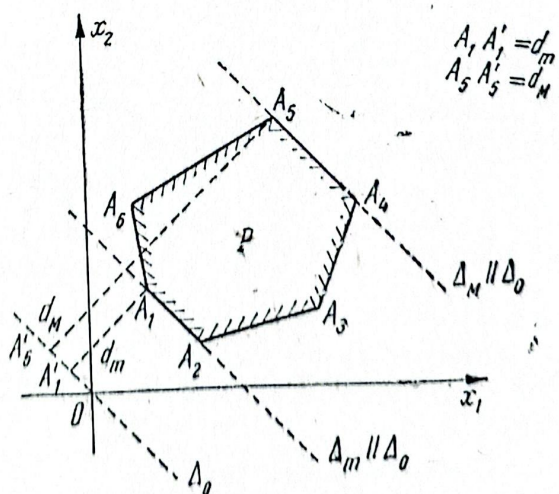


Fig. 137.

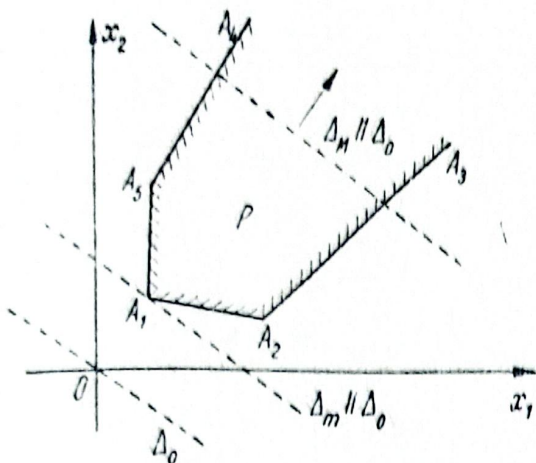


Fig. 138.

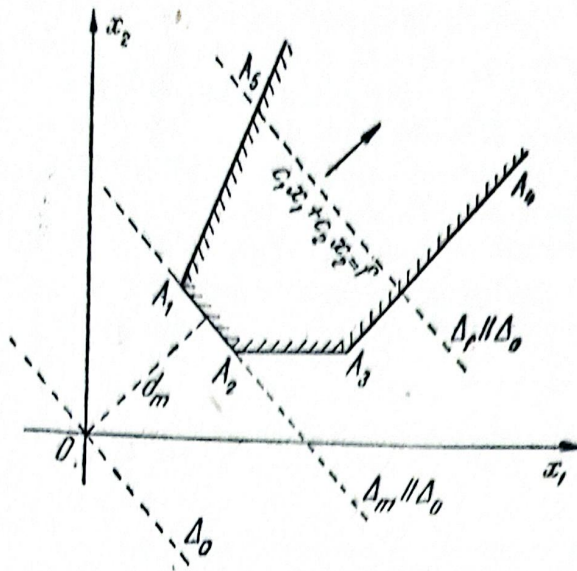


Fig. 139.

De exemplu, în figura 136, $\min f$ este dat de coordonatele $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ale punctelor situate pe dreapta $A_1A_2 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$.

Aceste coordonate trebuie să satisfacă în mod evident relațiile :

$$a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 = b_1$$

$$x'_1 \leq \bar{x}_1 \leq x''_1$$

$$x'_2 \leq \bar{x}_2 \leq x''_2$$

Cum $\min f = kd_m$, acest minim nu depinde de poziția punctelor situate pe dreapta A_1A_2 , ci numai de distanța $d_m = \|A_2A'_2\|$, care este aceeași deoarece $\Delta_m \parallel \Delta_0$ prin ipoteză.

— Dacă poligonul P este nemărginit (are puncte la infinit) problema poate admite :

- o soluție maximă infinită și un minim unic (fig. 138),
- o soluție maximă infinită și o infinitate de minime (fig. 139).

În astfel de cazuri funcția scop poate crește oricât fără a avea un maxim finit, sau poate descrește oricât fără a avea un minim finit.

Exemplu. Se cere maximum și minimumul funcției :

$$f = x_1 + x_2$$

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Din figura 140 se constată că mulțimea soluțiilor admisibile este situată în interiorul și pe laturile poligonului nemărginit P delimitat de dreptele A_1A_2 , A_1A_4 , A_2A_3 .

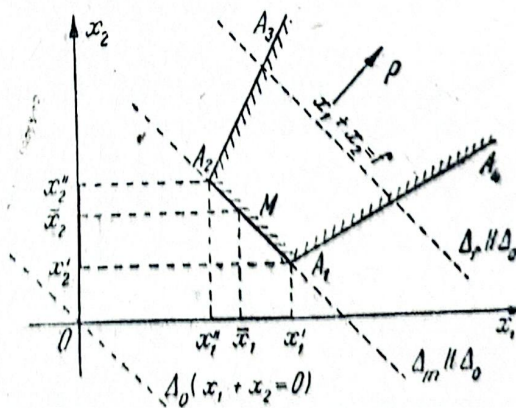


Fig. 140.

Funcția scop poate lua valori oricât de mari, deoarece deplasînd dreapta $x_1 + x_2 - f = 0$, paralel cu ea însăși, oricât de departe de origine, vom avea în tot timpul puncte comune cu poligonul soluțiilor. Maximul funcției f este deci infinit.

Problema admite o infinitate de soluții de minim și anume mulțimea punctelor situate pe latura $|A_1A_2|$ al Δ_2 , care conduc la aceeași valoare minimă a funcției scop; $\min f = 5$.

Mulțimea acestor soluții $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ sînt o combinație liniară convexă de coordonatele celor două vîrfuri $A_1(x'_1, x'_2); A_2(x''_1, x''_2)$ adică sînt de forma:

$$\bar{x}_1 = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x''_1$$

$$\bar{x}_2 = \lambda_1 x'_2 + \lambda_2 x''_2$$

în care λ_1, λ_2 satisfac relațiile:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1].$$

Justificare. Dacă notăm cu k raportul în care punctul M împarte segmentul A_1A_2 , vom putea scrie:

$$\bar{x}_1 = \frac{x'_1 + kx''_1}{1+k} = \frac{1}{1+k} x'_1 + \frac{k}{1+k} x''_1 = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x''_1$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x'_2 + kx''_2}{1+k} = \frac{1}{1+k} x'_2 + \frac{k}{1+k} x''_2 = \lambda_1 x'_2 + \lambda_2 x''_2.$$

Cînd punctul M descrie segmentul $|A_1A_2|$; $k \in [0, \infty]$; iar λ_1 și λ_2 satisfac relațiile: $\lambda_1 \in [1, 0]$; $\lambda_2 \in [0, 1]$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Cum în exemplul dat avem $A_1(4, 1); A_2\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$, coordonatele punctelor de minim vor fi:

$$\bar{x}_1 = 4\lambda_1 + \frac{7}{3} \lambda_2$$

$$\bar{x}_2 = \lambda_1 + \frac{8}{3} \lambda_2; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$\min f = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \lambda_1(4+1) + \lambda_2\left(\frac{7}{3} + \frac{8}{3}\right) = 5(\lambda_1 + \lambda_2) = 5.$$

— Dacă poligonul P se reduce la un punct, maximul și minimul funcției au aceeași valoare.

Exemplu. Se cere maximul și minimul funcției:

$$f = x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$3x_1 - x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

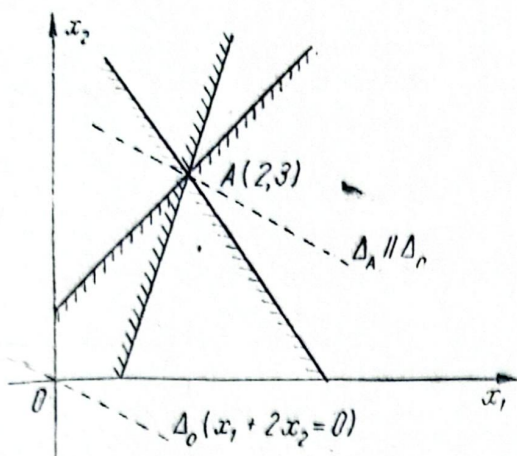


Fig. 141.

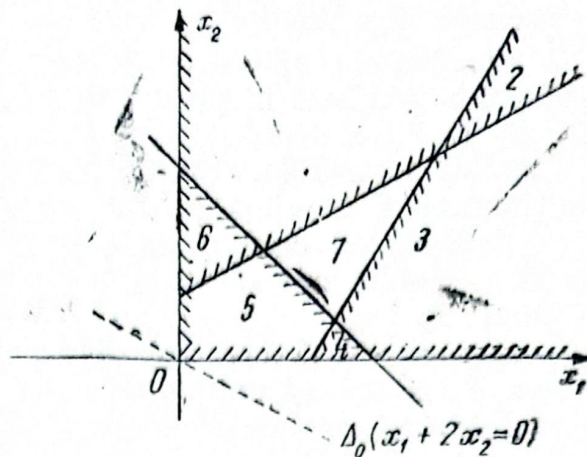


Fig. 142.

Din figura 141 se constată că poligonul soluțiilor se reduce la punctul $A(2, 3)$; $\max f = \min f = 8$. Probleme practice de acest fel sînt lipsite de sens.

— Dacă poligonul soluțiilor admisibile este vid, programul liniar nu are soluții. Sistemul de inecuații este incompatibil, restricțiile problemei sînt contradictorii.

Exemplu. Se cere maximul și minimul funcției:

$$\begin{aligned} f &= x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ 3x_1 - 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\geq 0; x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Din figura 142 se constată că poligonul soluțiilor admisibile este vid. Sistemul de inecuații este incompatibil. În nici una din cele 7 regiuni nu avem satisfăcute simultan toate restricțiile problemei. Programul dat nu admite soluții.

Interpretarea geometrică a programelor liniare care conțin m inecuații cu două necunoscute ne permite să tragem următoarele concluzii:

— Sistemul de restricții determină în R^2 într-un reper cartezian (Ox_1, x_2) , un poligon convex și mărginit (sau nemărginit) delimitat de p drepte ($p \leq m + 2$), situat în cadranul întâi, numit poligonul soluțiilor admisibile.

— Dacă poligonul soluțiilor este nevid, fiecărui vîrf îi corespunde o soluție admisibilă de bază.

— Dacă acest poligon este mărginit, funcția scop își atinge valoarea optimă (maximă sau minimă) într-o soluție admisibilă de bază, adică într-un vîrf al poligonului.

— Dacă funcția scop își atinge valoarea sa optimă (maximă sau minimă) în două vîrfuri, atunci ea are aceeași valoare optimă în orice punct al segmentului care unește cele două vîrfuri. Programul admite în acest caz o infinitate de soluții optime.

— Dacă poligonul soluțiilor admisibile este nemărginit, funcția scop poate avea o valoare optimă infinită.

— Dacă poligonul soluțiilor este vid, programul liniar nu are soluții. Sistemul de restricții este contradictoriu.

Exemple din diferite sectoare de activitate:

1. *Planificarea optimă a producției la o întreprindere industrială.* O fabrică și-a prevăzut în planul de producție două tipuri de aparate speciale P_1 și P_2 . Materialele și materia primă necesară confecționării acestor aparate se află în cantități suficiente, dar capacitatea de producție este limitată și imprimă producției următoarele restricții:

— Capacitatea de producție permite realizarea în unitate de timp (pe zi) a pieselor necesare pentru cel puțin 60 aparate de tipul P_1 și 40 de tipul P_2 .

— Capacitatea de montaj este de cel mult 70 aparate de ambele tipuri P_1 sau P_2 în aceeași unitate de timp (una zi).

— Numărul aparatelor de tipul P_1 trebuie să fie conform planului, de cel puțin 25 bucăți/zi, iar pentru acelea de tipul P_2 de cel puțin 14 bucăți pe zi.

Un aparat de tipul P_1 costă 40 lei, iar de tipul P_2 , 80 lei. Se cere să se determine planul zilnic de producție la acea fabrică astfel încât totalul cheltuielilor necesare realizării acestui plan să fie minim.

Soluție. Dacă notăm cu x_1 și x_2 numărul de aparate de tipul P_1 , respectiv P_2 , ce urmează a fi prevăzut în planul zilnic de producție, condițiile problemei ne conduc la următorul program liniar:

$$f = 40x_1 + 80x_2 = \min$$

$$\frac{x_1}{60} + \frac{x_2}{40} \geq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 70$$

$$x_1 \geq 25; \quad x_2 \geq 14$$

a cărui interpretare este evidentă.

Construind dreptele:

$$2x_1 + 3x_2 = 120 \quad (D_1)$$

$$x_1 + x_2 = 70 \quad (D_2)$$

$$x_1 = 25 \quad (D_3)$$

$$x_2 = 14 \quad (D_4)$$

se constată că restricțiile problemei sînt satisfăcute în interiorul și pe la turile poligonului convex și mărginit $ABCD$.

Problema admite 4 soluții admisibile de bază, date de coordonatele vîrfurilor $ABCD$ (fig. 143).

Construind apoi și dreapta $\Delta_0(40x_1 + 80x_2 = 0)$ se constată că vîrfurile A de coordonate: $x_1 = 39$; $x_2 = 14$, corespunde unui minim:

$$\min f = 40 \cdot 39 + 80 \cdot 14 = 2680.$$

Concluzie. Acea fabrică va trebui să-și prevadă în plan o producție zilnică de 39 aparate de tipul P_1 și 14 aparate de tipul P_2 .

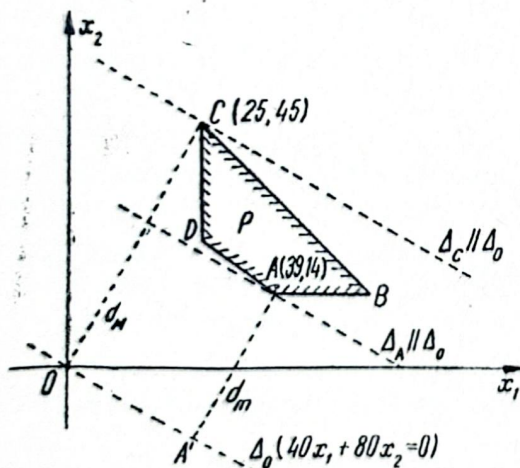


Fig. 143.

În acest mod toate restricțiile problemei vor fi satisfăcute, iar totalul cheltuielilor necesare realizării planului de producție va fi minim și egal cu 2680 lei/zi.

Un alt plan care să se realizeze cu un volum mai mic de cheltuieli în condițiile date nu poate exista.

Observații: Virfului C, cel mai depărtat de dreapta Δ_0 îi corespunde un maxim. Coordonatele punctului C:

$$x_1 = 25; x_2 = 45$$

maximizează funcția scop.

$$\max f = 40 \cdot 25 + 80 \cdot 45 = 4600.$$

Dacă vom planifica o producție zilnică de 25 aparate de tipul P_1 și 45 de tipul P_2 , planul de producție se va realiza cu un total maxim de cheltuieli în valoare de 4600 lei/zi.

Dacă beneficiul realizat este de 20% din prețul de cost, adică este de 8 lei, respectiv 16 lei pentru cele două tipuri de aparate și se cere un plan de producție care să conducă la un beneficiu maxim, atunci va trebui să planificăm 25 aparate de tipul P_1 și 45 de tipul P_2 . În această ipoteză se va realiza un beneficiu maxim de: $8 \cdot 25 + 16 \cdot 45 = 920$ lei/zi, iar totalul cheltuielilor va fi de 4600 lei/zi.

2. *Determinarea compoziției optime a amestecurilor furajere.* Se știe că fiecare animal are nevoie de anumite cantități minime de principii nutritive în unitatea de timp (de exemplu pe zi) care depind de specia din care face parte, vîrsta, masa animalului, scopul urmărit în alimentație etc.

Principiile nutritive se află în diferite proporții în produsele ce compun rația furajeră.

Exemple:

- un kg de ovăz conține 1,1 g proteină; 5,9 g valină; 7,8 g leucină;
- un kg tărîțe de grâu conține 1,58 g proteină; 7,7 g valină; 9,5 g leucină; 5,7 g lizină etc.

Problema cere să se determine cantitățile din fiecare fel de furaj, care trebuie să intre în rația furajeră zilnică a unui animal, astfel încît să i se asigure cel puțin cantitățile minime necesare din fiecare principiu nutritiv, iar costul acestei rații să fie minim.

Privind problema rației furajere sub aspectul ei general, vom presupune că avem n feluri de alimente diferite care conțin m principii nutritive:

A_j ; ($j = 1, 2, \dots, n$), denumirea alimentelor (furajelor) de care dispunem pentru obținerea rației furajere;

P_i ; ($i = 1, 2, \dots, m$), denumirea principiilor nutritive conținute în cele n alimente;

a_{ij} ; cantitatea din principiu nutritiv i conținut într-o unitate din alimentul j (kg);

b_i ; cantitatea minimă din principiu nutritiv i , care trebuie să o conțină rația furajeră (kg);

c_j ; costul unei unități din alimentul j (lei/kg);
 x_j ; cantitatea din alimentul j care trebuie să intre în compoziția rației furajere (kg).

Folosind aceste notații se obține programul liniar:

$$C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min.$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, n.$$

Aplicație. Se cunosc datele din tabela:

$P_i \backslash A_j$	A_1	A_2	b_i
P_1	0,1	0	0,4
P_2	0	0,1	0,6
P_3	0,1	0,2	2
P_4	0,2	0,1	1,7
c_j	2,4	0,8	—

Se cere să se determine cantitățile x_1 și x_2 din alimentele A_1 și A_2 , ce trebuie să intre în compoziția rației furajere a unui animal, astfel încât costul ei să fie minim.

Se obține următorul program liniar:

$$C = 2,4x_1 + 0,8x_2 = \min.$$

$$0,1x_1 \geq 0,4$$

$$0,1x_2 \geq 0,6$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \geq 2$$

$$0,2x_1 + 0,1x_2 \geq 1,7$$

care se mai poate scrie și sub forma:

$$C = 0,8(3x_1 + x_2) = \min.$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 20$$

$$2x_1 + x_2 \geq 17.$$

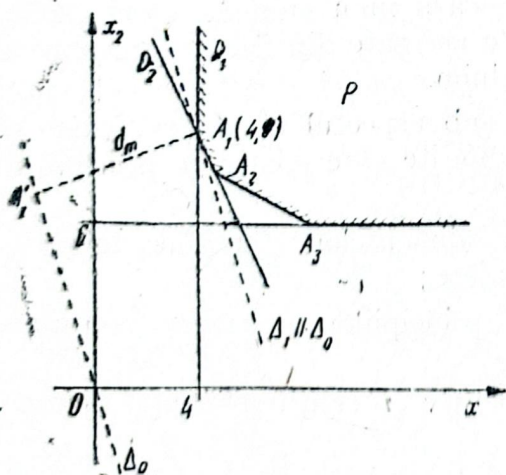


Fig. 144.

Din figura 144 se constată că poligonul P al soluțiilor admisibile este

nemărginit. Vîrfurile A_1 cel mai apropiat de dreapta $\Delta_0(3x_1 + x_2 = 0)$, minimizează funcția obiectiv C . Vîrfurile A_1 fiind la intersecția dreptelor:

$$x_1 = 4; \quad (D_1)$$

$$2x_1 + x_2 = 17; \quad (D_2)$$

se obține soluția: $x_1 = 4$; $x_2 = 9$; $\min C = 2,4 \cdot 4 + 0,8 \cdot 9 = 16,8$.

Concluzie. Rația furajeră va trebui să conțină: 4 kg din alimentul A_1 și 9 kg din alimentul A_2 . În acest mod vom avea asigurate:

$0,1x_1 = 0,1 \cdot 4 = 0,4$ kg din principiul nutritiv P_1 (exact cantitatea prescrisă);

$0,1x_2 = 0,1 \cdot 9 = 0,9$ kg din principiul nutritiv P_2 (un plus de 0,3 kg față de cantitatea prescrisă);

$0,1x_1 + 0,2x_2 = 0,1 \cdot 4 + 0,2 \cdot 9 = 2,2$ kg din principiul nutritiv P_3 (un plus de 0,2 kg față de cantitatea prescrisă);

$0,2x_1 + 0,1x_2 = 0,2 \cdot 4 + 0,1 \cdot 9 = 1,7$ kg din principiul nutritiv P_4 (exact cantitatea prescrisă).

Toate condițiile problemei vor fi satisfăcute, iar costul rației furajere va fi minim și egal cu 16,8 lei.

3. *Determinarea meniului optim (problema nutriției).* Se știe că viața unui om este condiționată de anumite cantități minime de principii nutritive: calorii, hidrocarburi, vitamine etc. Acestea se află în proporții diferite în alimentele pe care le consumă.

Totalul acestor cantități este calculat pe baze științifice pentru un organism sănătos pentru diferite vârste, ținînd seama de eforturile la care este supus omul în cursul unei zile.

Cantitățile minime din diferitele principii nutritive pe care le consumă un om determină *necesarul biologic*.

Problema cere să se determine cantitățile care trebuie consumate din fiecare aliment de care dispunem astfel încît ținînd seama de proporțiile în care se găsesc principiile nutritive în fiecare din ele, să se asigure *necesarul biologic* la un preț de cost minim.

Aplicație. Pentru un organism normal sînt necesare cel puțin 3000 calorii și 100 g proteine în unitate de timp (pe zi). Se cunosc următoarele date:

1000 g pîine conțin 2000 calorii și 50 g proteine;

1000 g brînză conțin 4000 calorii și 200 g proteine; costul unui kg de pîine este de 4 lei, iar a unui kg de brînză de 16 lei.

Se cere să se determine cantitatea de pîine și cantitatea de brînză care trebuie consumată de om într-o zi pentru a asigura *necesarul biologic* (minimum 3000 calorii și 100 g proteine) la un preț de cost minim.

Soluție. Dacă notăm cu x_1 și x_2 cantitățile de pîine și de brînză ce urmează a fi consumate, se obține următorul program liniar:

$$C = 4x_1 + 16x_2 = \min.$$

$$2000x_1 + 4000x_2 \geq 3000$$

$$50x_1 + 200x_2 \geq 100$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

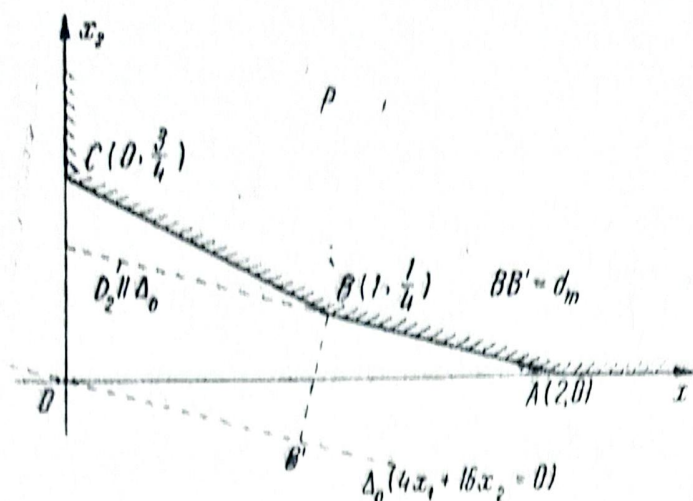


Fig. 145.

sau sub forma :

$$C = 4(x_1 + 4x_2) = \min.$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 3$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Construind poligonul soluțiilor admisibile (fig. 145), se constată că este nemărginit.

Latura $|AB|$ situată pe dreapta $D_2(x_1 + 4x_2 = 2)$ fiind paralelă cu

dreapta $\Delta_0(4x_1 + 16x_2 = 0)$, problema admite o infinitate de soluții de minim.

Rezultă că vom putea alege ca soluție minimă oricare din punctele situate pe latura $|AB|$. Soluția ce corespunde punctului B este :

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{4}$$

$$\min C = 4x_1 + 16x_2 = 4 \cdot 1 + 16 \cdot \frac{1}{4} = 8.$$

Meniul va fi compus din : 1000 g pâine și 250 g brânză.

În aceste condiții, vom avea asigurat la limită necesarul biologic: 3000 calorii și 100 g proteine, iar costul meniului va fi minim și egal cu 8 lei.

Observații. Dacă vom alege ca soluție punctul $A(2, 0)$ ar trebui să consumăm 2 kg pâine și 0 kg brânză. Aceasta înseamnă că va trebui să mâncăm pâinea goală, ceea ce nu este recomandabil și nici plăcut din punct de vedere gastronomic, deși toate condițiile problemei sînt satisfăcute: necesarul biologic este chiar depășit (4000 calorii și 100 g proteine), iar costul are aceeași valoare minimă, 8 lei.

— Dacă punctul ales se deplasează pe dreapta AB , cantitatea de pâine se micșorează, iar cantitatea de brânză va crește.

În momentul în care punctul ales ca soluție este B , cantitatea de brânză este maximă (250 g), iar cantitatea de pâine minimă (1000 g).

— În practică, problemele care admit o infinitate de soluții optime prezintă un interes deosebit, deoarece avem posibilitatea să alegem soluția care convine mai bine din punct de vedere tehnic sau organizatoric și se adaptează mai bine situației locale existente în acel moment și din alte puncte de vedere ce nu au putut fi luate în considerare la întocmirea programului.

— Programul unei probleme de nutriție are același aspect matematic ca al problemei în care se cere rația furajeră.

— Cum în problemele practice $m < n$, iar numărul soluțiilor de bază este cel mult m , rezultă că numărul alimentelor ce vor intra în compunerea meniului va fi mai mic decât acela de care dispunem.

Aplicație. Să presupunem că o întreprindere dispune de trei grupe de mașini M_1, M_2, M_3 la care trebuie să se prelucereze două tipuri de piese P_1 și P_2 . Folosind datele din tabelul:

$M_i \backslash P_j$	P_1	P_2	c_i
M_1	11	9	9 910
M_2	7	12	8 414
M_3	6	16	9 600
b_j	90	100	—

se cere să se determine un program care să conducă la un beneficiu maxim.

Soluție. Dacă notăm cu x_1 și x_2 numărul de piese din cele două tipuri se obține următorul program liniar:

$$\begin{aligned} B &= 90x_1 + 100x_2 = \max. \\ 11x_1 + 9x_2 &\leq 9\,910 \\ 7x_1 + 12x_2 &\leq 8\,414 \\ 6x_1 + 16x_2 &\leq 9\,600 \\ x_1 &\geq 0; x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Construind poligonul soluțiilor admisibile (fig. 146), se constată că problema are 5 soluții admisibile de bază ce corespund vîrfurilor O, A_1, A_2, A_3, A_4 . Vîrfurile A_2 este cel mai depărtat de dreapta Δ_0 . Rezolvînd sistemul format din ecuațiile dreptelor:

$$11x_1 + 9x_2 = 9\,910 \quad (D_1)$$

$$7x_1 + 12x_2 = 8\,414 \quad (D_2)$$

se obține:

$$x_1 = 626; x_2 = 336$$

$$\max B = 90 \cdot 626 + 100 \cdot 336 = 89\,940.$$

Concluzie. Dacă la acea întreprindere se vor planifica lunar cîte 626 piese de tipul P_1 și 336 piese de tipul

P_2 , beneficiul obținut va fi [maxim și egal cu 89940 lei.

În aceste condiții:

- mașina M_1 va lucra 9910 minute (exact la capacitatea sa maximă);
- mașina M_2 va lucra 8414 minute (exact la capacitatea sa maximă);
- mașina M_3 va lucra $6 \cdot 626 + 16 \cdot 336 = 9\,132$ (sub capacitatea sa maximă cu 468 minute).

Observație. Datele problemei au fost astfel alese încît soluția optimă a fost exprimată în numere întregi. În general, în aplicațiile prac-

tice soluția optimă se obține în numere fracționare. Dacă soluția optimă prin natura ei nu are sens decât în numere întregi (reprezintă bucăți, număr de transporturi, un număr de piese etc.) evaluarea necunoscutelor se poate face cu aproximație prin rotunjire.

Pentru a se obține o soluție optimă în numere întregi R. Gomory introduce în literatura de specialitate algoritmi care permit rezolvarea programelor liniare în numere întregi [6].

5. *Repartizarea optimă a culturilor agricole.* Pentru a putea enunța problema repartiției optime a culturilor agricole vom folosi datele trecute în tabela:

A_i	q_i t/ha	c_i lei/ha	b_i lei/t	Q_i t	x_i ha
A_1	q_1	c_1	b_1	Q_1	x_1
A_2	q_2	c_2	b_2	Q_2	x_2
...	...	...	...	...	...
A_m	q_m	c_m	b_m	Q_m	x_m
Total	—	C	B	Q	S

în care:

A_i = diferitele produse agricole ce urmează a fi prevăzute în planul de culturi;

q_i = producția medie la hectar a produsului agricol A_i , calculată pe bază de date statice (tone/ha);

c_i = cheltuielile de producție care revin la ha pentru cultura A_i , în care sînt incluse cheltuielile directe, comune și generale (lei/ha);

b_i = beneficiul ce revine pe tona din produsul A_i și care se obține scăzînd din valoarea producției la preț de vânzare, totalul cheltuielilor ce compun prețul de cost;

Q_i = producția planificată pentru produsul A_i , exprimată în tone;

x_i = suprafața în ha, care urmează a fi cultivată cu cultura A_i ;

C = totalul cheltuielilor alocate prin plan pentru perioada de timp respectivă (lei);

B = beneficiul total, rezultat din vânzarea tuturor produselor și al cărui maxim se caută;

Q = producția totală planificată, exprimată în tone;

S = suprafața arabilă totală care poate fi cultivată de o ieremă agricolă (ha).

Problema cere să se determine suprafețele $x_1, x_2, \dots, x_m$ ce urmează a fi cultivate cu culturile $A_1, A_2, \dots, A_m$ astfel încît:

- suprafața totală cultivată să fie egală cu S ;
- producția obținută la fiecare din culturi să fie cel puțin egală cu cantitățile prevăzute în plan;
- totalul cheltuielilor de producție să nu depășească suma C alocată prin plan;
- beneficiul realizat din vânzarea tuturor produselor să fie maxim.

Dacă vom ține seama de notațiile făcute și de enunțul problemei se obține programul liniar:

$$B = q_1 b_1 x_1 + q_2 b_2 x_2 + \dots + q_m b_m x_m = \max.$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = S$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m \leq C$$

$$q_i x_i \leq Q_i; i = 1, 2, \dots, m.$$

Aplicație. O fermă agricolă dispune de 8000 ha teren arabil. Folosind datele din tabela:

Felul culturii	q_i t/ha	c_i lei/ha	b_i lei/t	Q_i t	x_i ha
Grâu	2,4	350	625	6000	x_1
Porumb	3,6	500	500	7200	x_2
Secară	2	300	400	4800	x_3
Total	—	$31 \cdot 10^6$	B	$18 \cdot 10^3$	8000

se cere să se determine suprafețele x_1 , x_2 , x_3 ce urmează a fi cultivate cu grâu, porumb și secară, astfel încât beneficiul total realizat de acea fermă să fie maxim.

Soluție. Datele problemei ne conduc la următorul program liniar:

$$B = 2,4 \cdot 625x_1 + 3,6 \cdot 500x_2 + 2 \cdot 400x_3 = \max.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8000$$

$$350x_1 + 500x_2 + 300x_3 \leq 3100000$$

$$2,4x_1 \geq 6000$$

$$3,6x_2 \geq 7200$$

$$2x_3 \geq 4800.$$

Deoarece problema conține o restricție sub formă de egalitate, vom putea elimina una din necunoscute. Eliminarea lui x_3 ne conduce la un program liniar cu două necunoscute x_1 și x_2 :

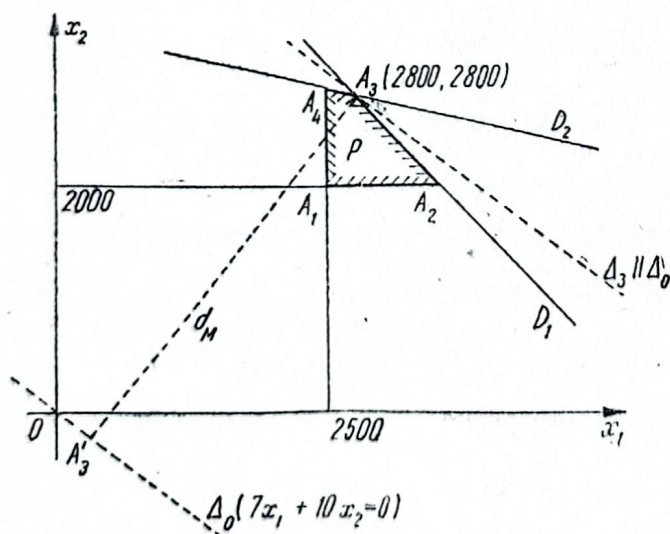


Fig. 147.

$$B = 700x_1 + 1000x_2 + 6400000 = \max.$$

$$x_1 \geq 2500$$

$$x_2 \geq 2000$$

$$x_1 + x_2 \leq 5600$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 14000$$

Construind poligonul P al soluțiilor admisibile (fig. 147) se constată că vârful A_3 cel

mai depărtat de dreapta $\Delta_0(7x_1 + 10x_2 = 0)$, corespunde unui maxim al funcției obiectiv B .

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile dreptelor D_1 și D_2 :

$$x_1 + x_2 = 5\,600 \quad (D_1)$$

$$x_1 + 4x_2 = 14\,000 \quad (D_2)$$

și ținînd seama de restricția $x_1 + x_2 + x_3 = 8\,000$, se obține:

$$x_1 = 2\,800; x_2 = 2\,800; x_3 = 2\,400$$

$$\max B = 11\,160\,000.$$

Concluzie. Dacă ferma agricolă va cultiva 2 800 ha cu grâu, 2 800 ha cu porumb și 2 400 ha cu secară, ea va realiza un beneficiu maxim de 11 160 000 lei. În aceste condiții:

— producția la grâu va fi de $2,4 \cdot 2\,800 = 6\,720$ t (cu 720 t peste plan);

— producția la porumb va fi de $3,6 \cdot 2\,800 = 10\,080$ t (cu 2 800 t peste plan);

— producția la secară va fi de $2 \cdot 2\,400 = 4\,800$ t (conform planului).

Pentru ca beneficiul real să fie cel puțin egal cu cel rezultat din calcul, producția la hectar la cele trei culturi trebuie să fie egală (sau mai mare) cu valorile luate în considerare la întocmirea planului.

De aceea, în cazul unui studiu concret se recomandă ca producția medie la ha a diferitelor culturi să fie calculată cu multă atenție, luîndu-se în considerare valorile medii pe un număr cît mai mare de ani.

— Mărimile q_i care reprezintă producția medie la ha sînt variabile aleatoare¹ (întîmplătoare), ele pot lua o serie de valori cuprinse într-un interval dat (bine definit în cazul unui studiu concret).

În cazul în care legea de repartiție a variabilei aleatoare q_i este cunoscută², problema se poate rezolva prin metodele programării stochastice³ [5] și [13].

6. *O problemă de repartizare a transporturilor.* Aprovizionarea orașului M cu un anumit produs de larg consum se face din trei centre: A_1, A_2, A_3 . Cantitatea totală din acel produs solicitată de orașul M este de 120 vagoane. Cele 3 centre dispun de: 72, 36 respectiv 96 vagoane din produsul respectiv.

Gradul de mecanizare a lucrărilor de încărcare și descărcare a vagoanelor este diferit și, în consecință, timpul necesar pentru încărcarea și descărcarea vagoanelor diferă de la un centru la altul astfel: 7 ore, 4 ore, respectiv 8 ore/vagon.

Timpul total necesar lucrărilor de încărcare—descărcare a tuturor vagoanelor este limitat la cel mult 912 ore.

Costul transportului unui vagon din cele 3 centre în orașul M este de 3, 5, 1 unități bănești (se va considera o unitate bănească egală cu 100 lei).

Se cere să se determine numărul de vagoane care trebuie trimise din cele 3 centre A_1, A_2, A_3 , astfel încît orașul M să primească întreaga

¹ „alea” în latină, joc de zaruri.

² adică se cunosc valorile q_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) pe care le poate lua variabila aleatoare, precum și probabilitățile p_{ij} de a se realiza aceste valori.

³ στοχαστική în greacă, scop, stohastiliz era o persoană capabilă de a prevedea un eveniment.

cantitate de 120 vagoane de care are nevoie, iar costul total al acestor transporturi să fie minim.

Soluția 1. Dacă notăm cu x_1, x_2, x_3 numărul vagoanelor ce trebuie trimise din cele 3 centre, condițiile problemei ne conduc la următorul program liniar:

$$f = 3x_1 + 5x_2 + x_3 = \min. \quad (6)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 120 \quad (7)$$

$$7x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 912$$

$$0 \leq x_1 \leq 72$$

$$0 \leq x_2 \leq 36$$

$$0 \leq x_3 \leq 96.$$

Dacă eliminăm necunoscuta x_3 folosind ecuația (7), programul liniar devine:

$$f = 2x_1 + 4x_2 + 120 = \min.$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 48$$

$$x_1 + x_2 \geq 24$$

$$0 \leq x_1 \leq 72$$

$$0 \leq x_2 \leq 36.$$

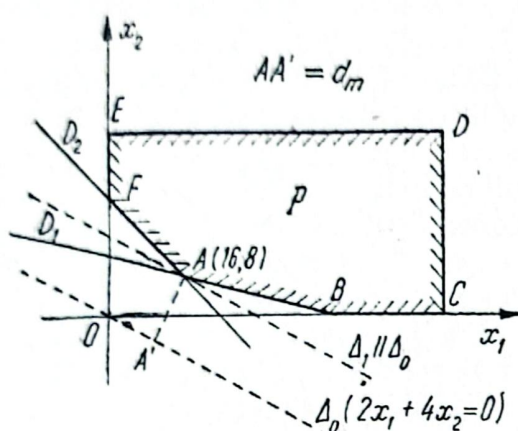


Fig. 148.

Din figura 148 se constată că punctul A cel mai apropiat de dreapta Δ_0 , minimizează funcția obiectiv f .

Rezolvând sistemul format din ecuațiile dreptelor D_1 și D_2 și folosind ecuația (7) se obține:

$$\begin{aligned} x_1 &= 16; x_2 = 8; x_3 = 96 \\ \min f &= 2 \cdot 16 + 4 \cdot 8 + 120 = 184. \end{aligned}$$

Concluzie. Centrele A_1, A_2, A_3 vor trimite 16, 8 respectiv 96 vagoane din produsul considerat. În acest mod orașul M va primi întreaga cantitate de care avea nevoie (120 vagoane), iar costul transportului va fi minim și egal cu 18 400 lei.

Soluția 2. Un alt mod de a rezolva un program liniar în cazul în care una din restricții este o ecuație este următorul:

Se face substituția:

$$x_1 = y_1; f = y_2, \quad (8)$$

și se determină x_2 și x_3 din (6) și (7) în funcție de y_1 și y_2 :

$$x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{4}y_2 - 30$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + 150.$$

Sistemul de restricții devine:

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 &\geq 168 \\ 0 &\leq y_1 \leq 72 \\ -2y_1 + y_2 &\leq 264 \\ -2y_1 + y_2 &\geq 120 \\ 2y_1 + y_2 &\leq 216 \\ 2y_1 + y_2 &\geq 600. \end{aligned}$$

Din figura 149 se constată că poligonul soluțiilor este hexagonul $ABCDEF$, definit de dreptele:

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 &= 168 & (D_1) \\ y_1 &= 72 & (D_2) \\ -2y_1 + y_2 &= 264 & (D_3) \\ -2y_1 + y_2 &= 120 & (D_4) \\ 2y_1 + y_2 &= 216 & (D_5) \\ 2y_1 + y_2 &= 600 & (D_6) \end{aligned}$$

Dacă ținem seama de substituția $y_2 = f$, problema se reduce la determinarea unui punct ce aparține poligonului P al soluțiilor, a cărei ordonată este minimă. Acesta este evident, punctul A cel mai apropiat de axa Oy_1 . Se determină coordonatele punctului A , rezolvând sistemul format din ecuațiile dreptelor (D_1) și (D_5) :

$$y_1 = 16; \quad y_2 = 184,$$

apoi, folosind substituțiile (8) se obține același rezultat:

$$\begin{aligned} x_1 &= 16; \quad x_2 = 8; \quad x_3 = 96; \\ \min f &= 184. \end{aligned}$$

Dacă poligonul soluțiilor ar fi avut una din laturi, de exemplu, $|A_i A_{i+1}|$ ($1 \leq i \leq n$) paralelă cu axa Oy_1 , problema ar fi admis o infinitate de soluții; mulțimea punctelor situate pe latura $|A_i A_{i+1}|$. Toate aceste soluții ar fi condus la același minim al funcției f , deoarece $\min f = \|MM'\| = y_2 = \text{constant}$ pentru toate punctele situate pe latura $|A_i A_{i+1}|$ (fig. 150).

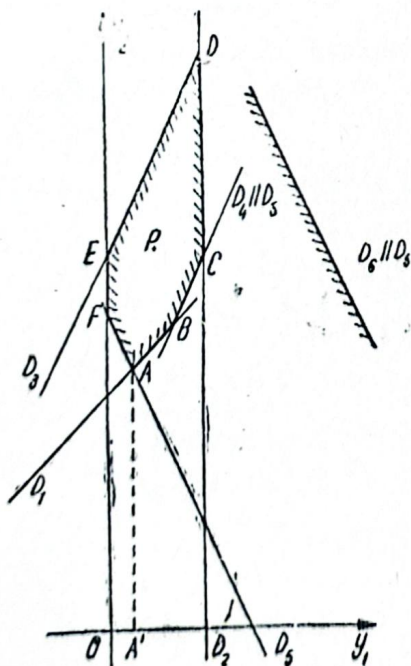


Fig. 149.

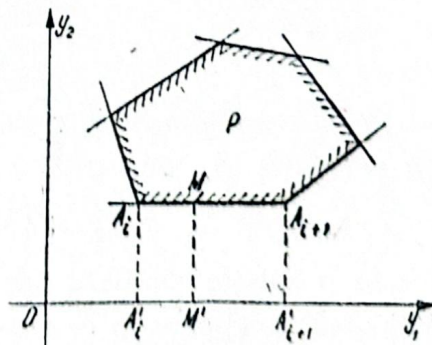


Fig. 150.

§ 4. Algoritmul simplex

Așa cum rezultă din interpretarea geometrică a programelor liniare, soluția optimă se află printre soluțiile admisibile de bază. Dar, numărul total al bazelor (soluțiilor de bază) pentru un program care conține m restricții cu n necunoscute C_n^m , crește considerabil odată cu m și n .

Deoarece nu se poate concepe calculul funcției scop pentru toate cele C_n^m soluții de bază (care în cazul unui studiu concret este de ordinul $10 \dots 10^{12}$), în literatura de specialitate au fost elaborate metode mult mai simple.

Pentru a vedea modul în care se obține o soluție optimă a unui program liniar vom expune metoda elaborată de G. B. Dantzig, cunoscută sub numele de *algoritmul simplex*, care se desfășoară pe etape astfel:

— Se determină o soluție inițială de bază.

— Printr-un procedeu iterativ se înlocuiește baza inițială cu o altă bază. Această operație de schimbare a bazei (de trecere de la un vîrf la altul al poliedrului) este astfel organizată încît funcția scop să se reducă (în cazul de minim) sau să se majoreze (în cazul de maxim).

— După un număr oarecare de pași (iterații succesive) se obține o bază pentru care funcția scop nu se mai poate reduce (pentru cazul de minim), sau nu mai poate crește (în cazul de maxim). Această bază corespunde unei soluții optime.

Exemplu. Să se rezolve următorul program liniar canonic:

$$f = 4x_1 + 2x_2 = \max$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Soluție.

— Se transformă într-un program standard.

Introducînd variabilele ecart x_3, x_4, x_5 se obține următorul program liniar standard:

$$f = 4x_1 + 2x_2 = \max \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \quad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 6$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, 5.$$

— Se determină o soluție inițială de bază admisibilă.

Se constată că, pentru $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$, se obține soluția:

$$\bar{x}_3 = 2; \quad \bar{x}_4 = 4; \quad \bar{x}_5 = 6,$$

care este o soluție de bază admisibilă.

Valoarea funcției scop ce corespunde bazei inițiale pe care o vom nota $B_0(x_3, x_4, x_5)$, este $f_0 = 4\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = 0$ și corespunde unui minim.

— Se face o schimbare de bază.

Deoarece coeficienții lui x_1 și x_2 sînt pozitivi, funcția scop va crește dacă vom considera o altă bază care să conțină pe x_1 sau x_2 . Cum coeficientul lui x_1 este mai mare decît al lui x_2 , vom introduce în bază pe x_1 în locul lui x_3 . Noua bază va fi $B_1(x_1, x_4, x_5)$. Rezolvînd sistemul (2) în raport cu variabilele x_2 și x_3 din afara bazei se obține:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 + x_2 - x_3 \\x_4 &= 6 - x_2 - x_3 \\x_5 &= 4 - 3x_2 + x_3;\end{aligned}\tag{3}$$

iar funcția scop devine:

$$f_1 = 8 + 6x_2 - 4x_3.\tag{4}$$

Pentru $x_2 = x_3 = 0$, se obține noua soluție de bază și valoarea corespunzătoare a funcției scop:

$$\bar{x}_1 = 2; \bar{x}_4 = 6; \bar{x}_5 = 4; f_1 = 8.$$

Schimbarea de bază efectuată, care constituie o iterație (un pas) a algoritmului simplex a condus la majorarea funcției scop (de la $f_0 = 0$, la $f_1 = 8$).

Observație. Dacă am fi introdus în bază pe x_1 în locul lui x_4 , sau în locul lui x_5 , noile baze: (x_3, x_1, x_5) respectiv (x_3, x_4, x_1) , nu ar fi fost admisibile (ar fi conținut și valori $x < 0$).

Într-adevăr, rezolvînd sistemul (2) în raport cu (x_2, x_4) , apoi în raport cu (x_2, x_5) se obțin următoarele soluții de bază neadmisibile:

- pentru baza (x_3, x_1, x_5) : $\bar{x}_3 = 6$; $\bar{x}_1 = -4$; $\bar{x}_5 = 10$; $\bar{x}_2 = \bar{x}_4 = 0$;
- pentru baza (x_3, x_4, x_1) : $\bar{x}_3 = -4$; $\bar{x}_4 = 10$; $\bar{x}_1 = 6$; $\bar{x}_2 = \bar{x}_5 = 0$.

Din (4) se constată că funcția scop se mai poate majora deoarece coeficientul lui x_2 este pozitiv.

Vom face deci o nouă schimbare de bază care să conțină pe x_3 . Introducînd în bază pe x_2 în locul lui x_5 , noua bază va fi $B_2(x_1, x_4, x_2)$. Repetînd procedeul folosit în prima iterație, se rezolvă sistemul (3) în funcție de variabilele x_3 și x_5 din afara bazei:

Se obține:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 \\x_4 &= \frac{14}{3} - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 \\x_2 &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5,\end{aligned}$$

iar funcția scop devine:

$$f_2 = 16 - 2x_3 - 2x_5.\tag{5}$$

Pentru $x_3 = x_6 = 0$, se obține soluția de bază și valoarea funcției scop :

$$\bar{x}_1 = \frac{10}{3}; \bar{x}_2 = \frac{4}{3}; \bar{x}_4 = \frac{14}{3}; f_2 = 16.$$

Se constată că după iterația a doua, funcția scop s-a majorat de la $f_1 = 8$, la $f_2 = 16$.

Coeficienții lui x_3 și x_6 din f_2 fiind negativi, funcția scop nu mai poate crește.

Soluția obținută după pasul doi este deci maximă :

$$\bar{x}_1 = \frac{10}{3}; \bar{x}_2 = \frac{4}{3}; \max f = f_2 = 16.$$

Pentru a aplica algoritmul simplex este necesar să știm :

- cum se determină o soluție de bază;
- cum se face o schimbare a bazei;
- care este criteriul care ne permite să stabilim dacă funcția scop și-a atins valoarea sa optimă (criteriul de optimalitate).

a) Cum se determină o soluție de bază.

Vom considera programul liniar sub forma :

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min. \quad (6)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

în care $m < n$. Să presupunem că m din cele n variabile, de exemplu primele m formează o bază. Aceasta înseamnă că :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = |a_{ij}|_{mm} \neq 0.$$

Sistemul (7) care se poate scrie :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{im}x_m = b_i - a_{i,m+1}x_{m+1} - \dots - a_{in}x_n; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

se poate rezolva în raport cu variabilele $x_{m+1}, \dots, x_n$ obținând o soluție de forma :

$$x_j = \bar{x}_j - x_{j,m+1}x_{m+1} - \dots - x_{jn}x_n; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Dacă anulăm acum variabilele din afara bazei :

$$x_{m+1} = \dots = x_n = 0$$

și presupunem că $\bar{x}_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, m$, se obține soluția admisibilă de bază :

$$x_j = \bar{x}_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Coeficientul x_{rk} se numește pivotul schimbării de bază, în care x_k intră în noua bază în locul lui x_r .

Dacă notăm z_0 și z'_0 valorile funcției scop ce corespund celor două soluții de bază $\hat{x}_i$ și $\hat{x}'_i$:

$$z_0 = \sum_{i=1}^m c_i \hat{x}_i; \quad z'_0 = \sum_{i=1}^m c_i \hat{x}'_i, \quad (14)$$

$$z_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij}; \quad z'_j = \sum_{i=1}^m c_i x'_{ij}. \quad (15)$$

Folosind (13), din (14) și (15) obținem:

$$z'_0 = \sum_{i=1}^m c_i \left(\hat{x}_i - \frac{\hat{x}_r}{x_{rk}} x_{ik} \right) = \sum_{i=1}^m c_i \hat{x}_i - \frac{\hat{x}_r}{x_{rk}} \sum_{i=1}^m c_i x_{ik} = z_0 - \frac{\hat{x}_r}{x_{rk}} (z_k - c_k)$$

$$z'_j - c'_j = \sum_{i=1}^m c_i \left(x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} x_{ik} \right) - c_j = (z_j - c_j) - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} (z_k - c_k).$$

$$\boxed{\begin{aligned} z'_0 &= z_0 - \frac{\hat{x}_r}{x_{rk}} (z_k - c_k) \\ z'_j - c'_j &= (z_j - c_j) - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} (z_k - c_k) \end{aligned}} \quad (16)$$

Formulele (13) și (16) ne permit să facem o schimbare de bază, în care am presupus că x_k intră în noua bază în locul lui x_r .

Criteriul de intrare în bază.

— Cazul în care se cere minimul.

Dacă notăm $\theta_i = \frac{\hat{x}_i}{x_{ik}} > 0$; $z'_0 = z_0 - \theta_i (z_k - c_k)$.

Valoarea inițială z_0 a funcției scop se va *reduce* cu cantitatea maximă, atunci când diferența $z_k - c_k > 0$, va fi maximă.

Dacă:

$$\max (z_k - c_k) = z_k - c_k > 0; \quad j = m+1, \dots, n; \quad (17)$$

variabila x_k va intra în noua bază.

— Cazul în care se cere maximul.

Funcția scop se va *majora* cu cantitatea maximă, atunci când diferența $z_k - c_k < 0$, va fi minimă.

Dacă:

$$\min (z_k - c_k) = z_k - c_k < 0; \quad j = m+1, \dots, n \quad (18)$$

variabila x_k va intra în noua bază.

Concluzie.

— Dacă se cere minimul, va intra în bază variabila pentru care diferența $z_k - c_k$ are valoarea pozitivă maximă.

— Dacă se cere maximul, va intra în bază variabila pentru care diferența $z_k - c_k$ are valoarea negativă minimă.

Relațiile (17) și (18) reprezintă criteriul de intrare în bază.

Criteriul de ieșire din bază.

Noua bază va fi admisibilă dacă vom avea satisfăcute condițiile de nenegativitate:

$$\bar{x}'_i = \bar{x}_i - \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}} x_{ik} \geq 0$$

sau

$$0 \leq \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}} \leq \frac{\bar{x}_i}{x_{ik}}.$$

Dacă:

$$\min \frac{\bar{x}_i}{x_{ik}} = \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}}; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (19)$$

variabila x_r va ieși din bază.

Concluzie.

— Se cercetează rapoartele $\theta_i > 0$; $i=1, 2, \dots, m$. Variabila ce corespunde raportului θ_i minim, va ieși din bază.

— Dacă toți $x_{ik} < 0$, variabila x_k nu poate intra în bază.

— Dacă avem mai multe rapoarte θ_i minime egale, se alege unul din ele.

c) Criteriul de optimalitate.

— Cazul în care se cere minimul.

După fiecare schimbare de bază putem avea următoarele situații:

1) $z_j - c_j \leq 0$, egalitatea avînd loc numai pentru variabilele din bază.

Soluția este minimă și unică.

2) $z_j - c_j \leq 0$, egalitatea avînd loc și pentru unele variabile din afara bazei. Programul admite o infinitate de soluții, care conduc la aceeași valoare minimă a funcției scop.

Aceste soluții se pot obține dacă vom introduce în bază succesiv, cîte una din variabilele din afara bazei pentru care $z_j - c_j = 0$.

3) $z_j - c_j > 0$, pentru anumiți j , dar $x_{ij} < 0$ pentru toți $i=1, 2, \dots, m$. Funcția scop poate descrește oricît neavînd un minim finit, deoarece $\bar{x}'_i = \bar{x}_i - \theta_i x_{ik} > 0$, pentru orice $\theta_i > 0$, $\min z = -\infty$.

4) $z_j - c_j > 0$, pentru anumiți j , dar avem și $x_{ij} > 0$ pentru unele valori ale lui $i=1, 2, \dots, m$. Funcția nu este minimă, ea poate fi micșorată efectuînd o schimbare de bază.

— Cazul în care se cere maximul.

1) $z_j - c_j \geq 0$, egalitatea avînd loc numai pentru variabilele din bază.

Soluția este maximă și unică.

2) $z_j - c_j \geq 0$, egalitatea avînd loc și pentru unele variabile din afara bazei. Programul admite o infinitate de soluții, care conduc la aceeași valoare maximă a funcției scop.

3) $z_j - c_j < 0$, pentru anumiți j , dar $x_{ij} < 0$, pentru toți $i=1, 2, \dots, m$. Funcția scop poate crește oricît neavînd un maxim finit, deoarece $\bar{x}'_i = \bar{x}_i - \theta_i x_{ik} > 0$, pentru orice $\theta_i > 0$, $\max z = +\infty$.

4) $z_j - c_j < 0$, pentru anumiți j , dar avem și $x_{ij} > 0$, pentru unele valori ale lui i . Funcția scop nu este maximă, ea mai poate fi majorată efectuînd o schimbare de bază.

Pentru a aplica algoritmul simplex se folosește un tabel de forma :

Tabela 1

B	c_j	$\bar{x}_j$	$c_1 \dots c_r \dots c_t \dots c_m \dots c_k \dots c_j \dots c_n$
			$x_1 \dots x_r \dots x_t \dots x_m \dots x_k \dots x_j \dots x_n$
x_1	c_1	$\bar{x}_1$	1 ... 0 ... 0 ... 0 ... x_{1k} ... x_{1j} ... x_{1n}
...	...	...	...
x_r	c_r	$\bar{x}_r$	0 ... 1 ... 0 ... 0 ... x_{rk} ... x_{rj} ... x_{rn}
...	...	...	...
x_t	c_t	$\bar{x}_t$	0 ... 0 ... 1 ... 0 ... x_{tk} ... x_{tj} ... x_{tn}
...	...	...	...
x_m	c_m	$\bar{x}_m$	0 ... 0 ... 0 ... 1 ... x_{mk} ... x_{mj} ... x_{mn}
		z_0	0 ... 0 ... 0 ... 0 ... $z_k - c_k$... $z_j - c_j$... $z_n - c_n$

numit tabel simplex, care se completează astfel :

- în coloana B (baza) se trec variabilele din bază ;
- în coloana c_j , coeficienții din funcția scop ce corespund variabilelor din bază ;
- în coloana $\bar{x}_j$, soluția de bază, adică valorile variabilelor ce compun baza :

$$x_j = \bar{x}_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, m$$

care se presupune cunoscută ;

- în coloanele următoare, coeficienții tuturor variabilelor din soluția de bază :

$$x_i = \bar{x}_i - x_{i,m+1} x_{m+1} - \dots - x_{in} x_n; i = 1, 2, \dots, m$$

luați cu semnul schimbat * ;

- în prima linie, toți coeficienții din funcția scop ;
- în ultima linie, coloana $\bar{x}_j$, valoarea funcției scop ce corespunde soluției de bază :

$$z_0 = c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \dots + c_m \bar{x}_m;$$

- în celelalte coloane din ultima linie se trec diferențele :

$$z_j - c_j; j = 1, 2, \dots, n$$

în care :

$$z_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \dots + c_m x_{mj}; j = 1, 2, \dots, n.$$

Cum $z_j = c_j$, pentru $j = 1, 2, \dots, m$, rezultă că pentru variabilele din bază avem :

$$z_j - c_j = 0; j = 1, 2, \dots, m.$$

Folosind criteriul de optimalitate se constată dacă soluția inițială de bază obținută în tabela 1 este optimă. În cazul în care nu este optimă se face o schimbare de bază. Folosind criteriul de intrare în bază (18) și de

* dacă anulăm variabilele din afara bazei: $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$, se obține soluția de bază $x_i = \bar{x}_i; i = 1, 2, \dots, m$.

ieșire din bază (19), se stabilește care este variabila care intră și care iese din bază.

Dacă vom presupune că variabila x_k intră în bază în locul lui x_r , noua bază va conține variabilele $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_i, \dots, x_m)$.

Noua tabelă simplex devine:

Tabela 2

B'	c_j	$\bar{x}_j$	$c_1 \dots c_r \dots c_i \dots c_m \dots c_k \dots c_j \dots c_n$
			$x_1 \dots x_r \dots x_i \dots x_m \dots x_k \dots x_j \dots x_n$
x_1	c_1	$\bar{x}'_1$	$1 \dots x'_{1r} \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots x'_{1j} \dots x'_{1n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$
x_k	c_k	$\bar{x}'_k$	$0 \dots x'_{kr} \dots 0 \dots 0 \dots 1 \dots x'_{kj} \dots x'_{kn}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$
x_i	c_i	$\bar{x}'_i$	$0 \dots x'_{ir} \dots 1 \dots 0 \dots 0 \dots x'_{ij} \dots x'_{in}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$
x_m	c_m	$\bar{x}'_m$	$0 \dots x'_{mr} \dots 0 \dots 1 \dots 0 \dots x'_{mj} \dots x'_{mn}$
		z'_0	$0 \dots z'_r - c'_r \dots 0 \dots 0 \dots -0 \dots z'_j - c'_j \dots z'_n - c'_n$

Elementele din tabela 2 se obțin din formulele (11), (13), (16).

Observații: Elementele ce corespund liniei pivotului se obțin împărțind toate elementele la pivot:

$$\bar{x}'_k = \frac{\bar{x}_r}{x_{rk}}; x'_{kj} = \frac{x_{rj}}{x_{rk}}; j = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

— Toate celelalte elemente din tabela 2 (inclusiv acelea situate pe ultima linie) se pot deduce ușor din tabela 1, folosind *regula dreptunghiului*¹. Astfel, elementul x'_{ij} se obține din relația²:

$$x'_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} x_{rk} & x_{rj} \\ x_{ik} & x_{ij} \end{vmatrix}}{x_{rk}} = \frac{x_{rk} x_{ij} - x_{ik} x_{rj}}{x_{rk}} \quad (21)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; i \neq k.$$

Elementele situate pe ultima linie, sînt date de relațiile³:

$$z'_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_{rk} & \bar{x}_r \\ z_k - c_k & z_0 \end{vmatrix}}{x_{rk}}; z'_j - c'_j = \frac{\begin{vmatrix} x_{rk} & x_{rj} \\ z_k - c_k & z_j - c_j \end{vmatrix}}{x_{rk}}; j = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

Expresiile de la numărător se calculează ca un determinant de ordinul doi, împărțind apoi rezultatul la pivot.

— Trecerea de la o bază la alta constituie o iterație. După fiecare iterație funcția scop prezintă o reducere (în cazul de minim), sau o majorare (în cazul de maxim) față de valoarea ei obținută în iterația precedentă.

¹ cunoscută și sub numele de metoda în cruce a lui Routh.

² identică cu (13).

³ identice cu relațiile (16).

— Iterațiile se continuă pînă cînd, în baza criteriului de optimalitate stabilit, funcția scop și-a atins valoarea sa optimă (minimă, respectiv maximă).

— Dacă restricțiile unui program liniar canonic sînt de forma :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$b_i \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

se poate obține ușor o soluție inițială de bază, scriind restricțiile sub formă de egalități :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + x_i^e = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

unde $x_i^e \geq 0$ sînt variabile ecart.

Pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, se obține soluția inițială de bază :

$$x_i^e = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Exemplu. Vom relua programul liniar canonic :

$$z = 4x_1 + 2x_2 = \max.$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Soluție. Introducînd variabilele ecart x_3, x_4, x_5 se obține programul standard :

$$z = 4x_1 + 2x_2 = \max$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 6$$

$$x_i \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, 5$$

care admite soluția inițială de bază :

$$\bar{x}_3 = 2; \quad \bar{x}_4 = 4; \quad \bar{x}_5 = 6; \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0.$$

Se întocmește tabela simplex corespunzătoare acestei soluții :

↓

	B_0	c_j	$\bar{x}_j$					
				4	2	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
←	x_3	0	2	1	-1	1	0	0
	x_4	0	4	-1	2	0	1	0
	x_5	0	6	1	2	0	0	1
			0	-4	-2	0	0	0

Deoarece se cere maximul funcției scop, și avem diferențe $z_j - c_j < 0$, programul nu este optim. Funcția scop se mai poate majora efectuînd o schimbare de bază.

Cum :

$$\min (z_j - c_j) = z_1 - c_1 = -4 < 0;$$

variabila x_1 va intra în noua bază. Cercetînd apoi rapoartele :

$$\theta_i = \frac{\bar{x}_i}{x_{ik}} > 0; \quad i = 3, 5$$

se constată că :

$$\min \theta_i = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{6}{1} \right\} = \frac{2}{1}; \quad i = 3, 5$$

și corespunde variabilei x_3 . Deci x_1 va intra în bază în locul lui x_3 . Noua bază va fi $B_1(x_1, x_4, x_5)$. Pivotul schimbării de bază care se află la intersecția liniei x_3 cu coloana x_1 este egal cu 1.

Se întocmește tabela simplex pentru baza B_1 , folosind formulele* (20), (21), (22).

			↓				
B_1	c_j	$\bar{x}_j$	4	2	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	4	2	1	-1	1	0	0
x_4	0	6	0	1	1	1	0
← x_5	0	4	0	3	-1	0	1
		8	0	-6	4	0	0

Deoarece avem $z_2 - c_2 = -6 < 0$, soluția obținută în prima iterație nu este optimă. Variabila x_2 (ce corespunde diferenței $z_2 - c_2$), va intra în noua bază.

Se constată apoi că :

$$\min \theta_i = \min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{4}{3} \right\} = \frac{4}{3}; \quad i = 4, 5$$

și deci variabila x_2 va intra în bază în locul lui x_5 . Noua bază va fi $B_2(x_1, x_4, x_2)$. Se întocmește tabela simplex pentru baza B_2 .

B_2	c_j	$\bar{x}_j$	4	2	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	4	10/3	1	0	2/3	0	1/3
x_4	0	14/3	0	0	4/3	1	-1/3
x_2	2	4/3	0	1	-1/3	0	1/3
		16	0	0	2	0	2

Se constată că :

$z_j - c_j > 0$, pentru variabilele din afara bazei (x_3, x_5);

$z_j - c_j = 0$, numai pentru variabilele din bază (x_1, x_2, x_4).

* coeficienții variabilelor x_1, x_4, x_5 în noua bază nu se mai calculează deoarece sînt egali cu coeficienții lui x_3, x_4, x_5 din vechea bază.

În baza criteriului de optimalitate, soluția programului canonic este maximă și unică.

$$x_1 = \frac{10}{3}; \quad x_2 = \frac{4}{3}; \quad \max z = 16.$$

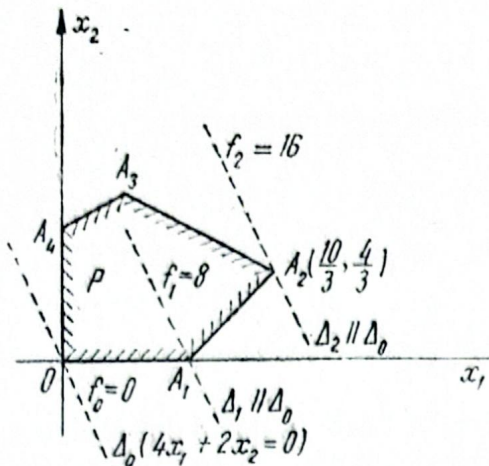


Fig. 151.

— Soluția optimă a fost obținută numai după doi pași*.

— Coeficienții variabilelor x_1, x_4, x_2 din baza B_2 nu au fost calculați, ei fiind egali cu coeficienții variabilelor x_1, x_4, x_3 din baza precedentă.

În general, la o schimbare a bazei, coeficienții variabilelor din noua bază nu se mai calculează, ei fiind egali cu coeficienții corespunzători variabilelor din baza precedentă. În fiecare iterație se vor calcula numai coeficienții celor $n - m$ variabile din afara bazei.

Algoritmul simplex ne permite să determinăm numai acele soluții admisibile de bază care conduce la creșterea (reducerea) cu cantitatea maximă posibilă a funcției scop din mulțimea de creșteri (reduceri) posibile.

În exemplul dat, se constată ușor că pornind din origine unde $f_0 = 0$, s-a trecut în vârful A_1 în care $f_1 = 8$ (și nu în A_4 unde $f_4 = 4$), apoi în vârful A_2 unde funcția scop are valoarea maximă $f_2 = 16$ (și nu în A_3 în care $f_3 = 9$). Așadar algoritmul simplex constituie o metodă selectivă, care ne permite să ajungem la soluția optimă după un număr minim de iterații (schimbări de bază).

Din aplicarea acestui algoritm la un număr mare de exemple, rezultă că, numărul p al iterațiilor care conduc la soluția optimă, când nu se cunoaște o soluție inițială de bază, satisface relația:

$$\frac{3m}{2} \leq p \leq 2m.$$

Determinarea unei soluții inițiale de bază.

a. Cazul în care programul conține restricții de forma:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i; \quad b_i \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Se transformă inecuațiile în ecuații:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_i^e = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

din care se deduce soluția inițială de bază:

$$x_i^e = b_i; \quad x_j = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

* identică cu soluția geometrică din figura 151.

b. Cazul în care programul conține restricții de forma :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i; b_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, m. \quad (23)$$

Se transformă sistemul (23) în ecuații :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_i^e &= b_i; i = 1, 2, \dots, m \\ x_i^e &\geq 0; i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (24)$$

Se consideră apoi programul artificial :

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m x_i^a \rightarrow \min \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_i^e + x_i^a = b_i; i = 1, 2, \dots, m \quad (26)$$

$$x_j \geq 0; x_i^e \geq 0; x_i^a \geq 0; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

în care variabilele ecart x_i^e , transformă inecuațiile în ecuații, iar x_i^a sînt variabile artificiale.

Introducerea lor în sistemul de restricții ne permite să determinăm soluția de bază a programului (25) :

$$x_i^e = b_i; x_i^a = 0; x_j = 0; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Pentru a obține o soluție de bază a programului dat (24) se cunosc două metode: *metoda penalizării* datorată lui A. Charnes [2] și *metoda celor două faze* pe care o vom expune în cele ce urmează.

În prima fază se rezolvă programul liniar :

$$\varphi = \sum_{i=1}^m x_i^a \rightarrow \min.$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_i^e + x_i^a = b_i; i = 1, 2, \dots, m. \quad (28)$$

$$x_j \geq 0; x_i^e \geq 0; x_i^a \geq 0; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

care admite soluția inițială de bază :

$$x_i^a = b_i; x_i^e = 0; x_j = 0; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

Putem avea următoarele situații :

1. $\min \varphi = 0$, iar toate variabilele artificiale au fost eliminate din bază. În acest caz soluția optimă a programului (28) constituie o soluție inițială de bază a programului (24).

Se trece la faza a doua rezolvînd programul (24), folosind baza inițială obținută în prima fază.

2. $\min \varphi = 0$, dar există variabile artificiale (cu valoarea zero) care nu pot fi eliminate din bază deoarece toți $x_{ij} = 0$.

Se trece la faza a doua, neglijînd liniile care conțin variabile artificiale. Iterațiile se continuă, minimizînd funcția scop a problemei date (24).

3. $\min \varphi > 0$. Problema dată nu admite soluții. Restricțiile programului dat sînt contradictorii.

c. Cazul în care programul conține restricții de forma :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i; b_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, m.$$

Se consideră programul artificial :

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m x_i^a \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_i^a = b_i; i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0; x_i^a \geq 0; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Se continuă ca și în cazul b, folosind metoda celor două faze.

Exemplul 1. Să se rezolve programul liniar :

$$\begin{aligned} \min \quad & (2x_1 + x_2) \\ & 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Soluție. Aducem problema la forma standard introducând variabilele ecart x_1^e, x_2^e, x_3^e :

$$\begin{aligned} \min \quad & (2x_1 + x_2) \\ & 3x_1 + x_2 - x_1^e = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_2^e = 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3^e = 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0; x_1^e, x_2^e, x_3^e \geq 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Deoarece nu cunoaștem o soluție inițială de bază, introducem variabilele artificiale x_1^a, x_2^a, x_3^a și obținem programul :

$$\begin{aligned} f = \quad & (2x_1 + x_2) + (x_1^a + x_2^a + x_3^a) \rightarrow \min \\ & 3x_1 + x_2 - x_1^e + x_1^a = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_2^e + x_2^a = 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_3^a = 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0; x^e \geq 0; x_i^a \geq 0; i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{31}$$

Rezolvăm problema (31) folosind metoda celor două faze.

În prima fază rezolvăm programul:

$$\varphi = x_1^a + x_2^a + x_3^a \rightarrow \min \quad (32)$$

în condițiile (31), care admite soluția inițială de bază:

$$x_1^a = 3; x_2^a = 6; x_3^a = 2; x_1^e = x_2^e = x_3^e = 0.$$

Întocmim tabela simplex pentru prima fază.

Faza 1

B	c_j	$\bar{x}_j$	0	0	0	0	0	1	1	1	θ_i
			x_1	x_2	x_1^a	x_2^e	x_3^e	x_1^e	x_2^a	x_3^a	
x_1^a	1	3	3	1	-1	0	0	1	0	0	3/3
x_2^a	1	6	4	3	0	-1	0	0	1	0	6/4
x_3^a	1	2	1	2	0	0	-1	0	0	1	2/1
		11	8	6	-1	-1	-1	0	0	0	
x_1	0	1	1	1/3	-1/3	0	0		0	0	3
x_2^a	1	2	0	5/3	4/3	-1	0		1	0	6/5
x_3^a	1	1	0	5/3	1/3	0	-1		0	1	3/5
		3	0	10/3	5/3	-1	-1		0	0	
x_1	0	4/5	1	0	-2/5	0	1/5		0		4
x_2^a	1	1	0	0	1	-1	1		1		1
x_2	0	3/5	0	1	1/5	0	-3/5		0		-
		1	0	0	1	-1	1		0		
x_1	0	3/5	1	0	-3/5	1/5	0				
x_3^e	0	1	0	0	1	-1	1				
x_2	0	6/5	0	1	1	4/5	0				
		0	0	0	0	0	0				

În fiecare iterație, diferențele $\varphi_j - c_j$, maxime, rapoartele θ_i , minime și pivotul corespunzător schimbării de bază, au fost marcate prin cifre groase.

După 3 iterații, prima fază se termină cu $\min \varphi = 0$.

În faza 2, întocmim tabela simplex pentru problema (30), pornind de la baza inițială: $x_1 = 3/5$; $x_3^e = 1$; $x_2 = 6/5$, folosind elementele obținute în ultima iterație din prima fază.

Faza 2

B	c_j	$\bar{x}_j$	2	1	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_3^e	x_3^a	
x_1	2	3/5	1	0	-3/5	1/5	0	
x_3^e	0	1	0	0	1	-1	1	
x_2	1	6/5	0	1	4/5	-3/5	0	
		12/5	0	0	-2/5	-1/5	0	

Se constată că toți $z_j - c_j \leq 0$. Soluția obținută în faza 1 este optimă și pentru problema (30):

$$\bar{x}_1 = 3/5; \bar{x}_2 = 6/5; \bar{x}_1^e = \bar{x}_2^e = 0; \bar{x}_3^e = 1;$$

$$\min z = 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 12/5.$$

Observații: În iterația a doua avem pe ultima linie două diferențe maxime egale cu 1, ce corespund variabilelor x_1^e și x_3^e . În iterația a treia se putea introduce oricare din aceste două variabile.

Alegerea trebuie făcută astfel, încât funcția scop a problemei (31), $f = (2x_1 + x_2) + (x_1^e + x_2^e + x_3^e)$ să se micșoreze cât mai mult. Alegerea lui x_1^e micșorează pe f cu:

$$2\left(-\frac{2}{5}\right) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

Dacă alegem pe x_3^e , f se va micșora cu:

$$2 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot 1 + 1\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

Desigur, că x_3^e a fost introdus în bază.

Dacă am fi introdus în bază pe x_1^e soluția obținută la sfârșitul primei faze nu ar fi fost optimă și pentru problema (30).

În faza a doua ar mai fi fost necesară încă o iterație pentru a obține $\min f$.

— Interpretarea geometrică din figura 152 confirmă rezultatele obținute prin metoda simplex.

Exemplul 2. Să se rezolve programul liniar canonic:

$$\begin{aligned} \min & (-x_1 + x_2) \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Soluție. Scriem programul dat sub forma standard:

$$\begin{aligned} \min & (-x_1 + x_2) \\ & x_1 - 2x_2 + x_1^e = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_2^e = 5 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3^e = 2 \end{aligned} \quad (34)$$

$$x_1, x_2 \geq 0; x_i^e \geq 0; i = 1, 2, 3.$$

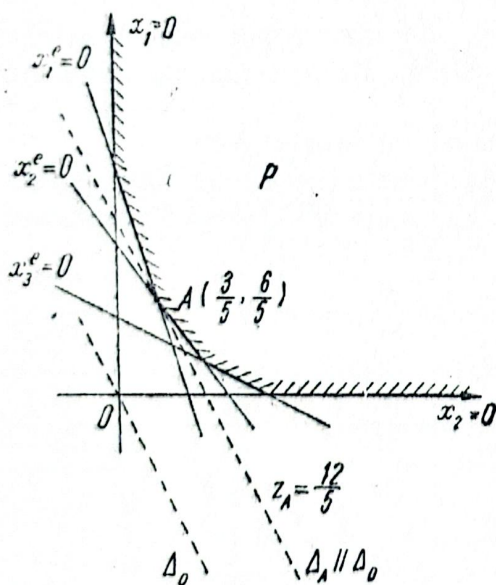


Fig. 152.

Introducem în ecuația a treia variabila artificială x_1^a și programul devine:

$$\begin{aligned} f &= (-x_1 + x_2) + x_1^a \rightarrow \min \\ x_1 - 2x_2 + x_1^e &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_2^e &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3^e + x_1^a &= 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0; x_1^a \geq 0; x_i^e \geq 0; i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (35)$$

Folosim metoda celor două faze. În faza I se rezolvă programul:

$$\varphi = x_1^a \Rightarrow \min$$

în condițiile (35), cunoscând soluția inițială de bază:

$$x_1^e = 2; x_2^e = 5; x_1^a = 2; x_1 = x_2 = x_3^e = 0.$$

Faza 1

B	c_j	$\bar{x}_j$	0	0	0	0	0	1	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	x_1^a	
x_1^e	0	2	1	-2	1	0	0	0	2
x_2^e	0	5	1	1	0	1	0	0	5
x_1^a	1	2	2	-1	0	0	-1	1	1
		2	2	-1	0	0	-1	0	
x_1^e	0	1	0	-3/2	1	0	1/2		
x_2^e	0	4	0	3/2	0	1	1/2		
x_1	0	1	1	-1/2	0	0	-1/2		
		0	0	0	0	0	0		

În faza 2 se rezolvă programul (34), care admite soluția inițială de bază:
 $x_1^e = 1; x_2^e = 4; x_1 = 1; x_2 = x_3^e = 0.$

Faza 2

B	c_j	$\bar{x}_j$	-1	1	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	
x_1^e	0	1	0	-3/2	1	0	1/2	2
x_2^e	0	4	0	3/2	0	1	1/2	8
x_1	-1	1	1	-1/2	0	0	-1/2	-
		-1	0	-1/2	0	0	1/2	
x_3^e	0	2	0	-3	2	0	1	-
x_2^e	0	3	0	3	-1	1	0	1
x_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-
		-2	0	1	-1	0	0	
x_3^e	0	5	0	0	1	1	1	
x_2	1	1	0	1	-1/3	1/3	0	
x_1	-1	4	1	0	1/3	2/3	0	
		-3	0	0	-2/3	-1/3	0	

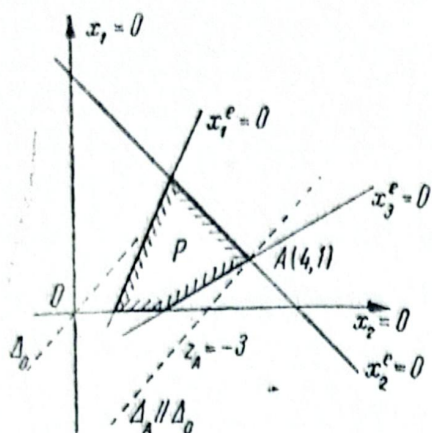


Fig. 153.

Observații: — Variabila artificială a fost eliminată din bază în prima fază după o singură iterație, fără ca soluția obținută să fie optimă și pentru programul (34). Au mai fost necesare încă două iterații în faza 2, pentru a găsi soluția optimă:

$$\bar{x}_1 = 4; \bar{x}_2 = 1;$$

$$\bar{x}_1^e = \bar{x}_2^e = 0;$$

$$\bar{x}_3^e = 5;$$

$$\min z = -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = -3.$$

— Soluția geometrică a programului liniar canonic (33) este dată în figura 153.

Exemplul 3. Cazul de incompatibilitate.

$$\begin{aligned} \min & (-x_1 + x_2) \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Soluție. Scriem programul dat sub forma standard, introducând o singură variabilă artificială x_1^a în ecuația a doua:

$$\begin{aligned} \min f &= (-x_1 + x_2) + x_1^a \\ & -2x_1 + x_2 + x_1^a = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_2^a + x_1^a = 8 \\ & x_1 + x_2 + x_3^a = 5 \end{aligned} \quad (37)$$

$$x_1, x_2 \geq 0; x_1^a \geq 0; x_i^e \geq 0; i = 1, 2, 3.$$

Vom folosi metoda celor două faze. În faza-1, rezolvăm programul:

$$\varphi = x_1^a \rightarrow \min$$

în condițiile (37), cunoscând soluția inițială de bază:

$$x_1^e = 2; x_1^a = 8; x_3^e = 5; x_1 = x_2 = x_3^a = 0.$$

Din ultima iterație a fazei 1, se constată că toți $\varphi_i - c_i < 0$ pentru variabilele din afara bazei și totuși variabila artificială nu a fost eliminată din bază. $\min \varphi = 1 > 0$.

Programul (37) nu admite soluții. Sistemul de restricții (36) scris sub forma:

$$\begin{aligned} & -2x_1 + x_2 + x_1^a = 2 \\ & x_1 - 2x_2 + x_2^a = -8 \\ & x_1 + x_2 + x_3^a = 5 \end{aligned} \quad (38)$$

B_i	c_i	$\bar{x}_i$	0	0	0	0	0	1	0_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	x_1^a	
x_1^e	0	2	-2	1	1	0	0	0	2
x_1^a	1	8	-1	2	0	-1	0	1	4
x_3^e	0	5	1	1	0	0	1	0	5
		8	-1	2	0	-1	0	0	
x_2	0	2	-2	1	1	0	0	0	-
x_1^a	1	4	3	0	-2	-1	0	1	4/3
x_3^e	0	3	3	0	-1	0	1	0	1
		4	3	0	-2	-1	0	0	
x_2	0	4	0	1	1/3	0	2/3	0	
x_1^a	1	1	0	0	-1	-1	-1	1	
x_1	0	1	1	0	-1/3	0	1/3	0	
		1	0	0	-1	-1	-1	0	

este incompatibil. Adunînd ecuațiile (38) se obține relația :

$$x_1^e + x_2^e + x_3^e = -1,$$

care nu poate avea loc deoarece: $x_1^e, x_2^e, x_3^e \geq 0$.

Incompatibilitatea rezultă și din soluția geometrică (fig. 154).

În nici una din cele 7 regiuni nu avem satisfăcute simultan inecuațiile (36).

Exemplul 4. Cazul în care minimul este nemărginit.

$$\begin{aligned}
 &\min (-x_1 + x_2) \\
 &-2x_1 + x_2 \leq 2 \\
 &x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
 &x_1 + x_2 \geq 5 \\
 &x_1, x_2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Soluție. Se scrie programul dat sub forma standard și apoi introducem variabila artificială x_1^a în ecuația a treia :

$$f = (-x_1 + x_2) + x_1^a \rightarrow \min.$$

$$-2x_1 + x_2 + x_1^e = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_2^e = 2 \quad (40)$$

$$x_1 + x_2 - x_3^e + x_1^a = 5$$

$$x_1, x_2, x_1^a \geq 0; x_i^e \geq 0; i = 1, 2, 3.$$

În faza 1 se rezolvă programul:
 $\varphi = x_1^a \rightarrow \min$ în condițiile (40).

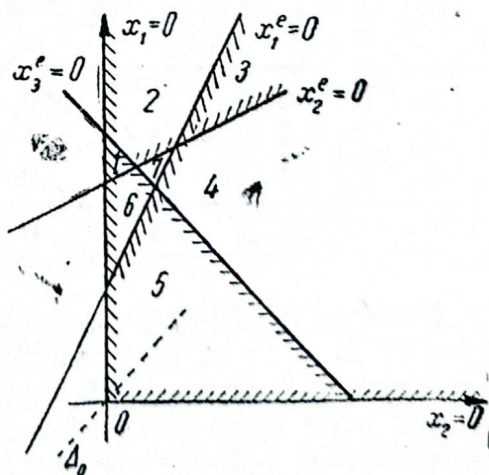


Fig. 154.

B	c_j	$\bar{x}_j$	0	0	0	0	0	1	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	x_1^a	
x_1^e	0	2	-2	1	1	0	0	0	-
x_2^e	0	2	1	-2	0	1	0	0	2
x_1^a	1	5	1	1	0	0	-1	1	5
		5	1	1	0	0	-1	0	
x_1^e	0	6	0	-3	1	2	0	0	-
x_1	0	2	1	2	0	1	0	0	1
x_1^a	1	3	0	3	0	-1	-1	1	1
		3	0	3	0	-1	-1	0	
x_1^e	0	9	0	0	1	1	-1		
x_1	0	4	1	0	0	1/3	-2/3		
x_2	0	1	0	1	0	-1/3	-1/3		
		0	0	0	0	0	0		

Faza 1 se termină cu $\min \varphi = 0$; $\bar{x}_1 = 4$; $\bar{x}_2 = 1$; $\bar{x}_1^e = 9$; $\bar{x}_2^e = \bar{x}_3^e = 0$.
În faza 2 se rezolvă programul:

$$\min (-x_1 + x_2)$$

$$-2x_1 + x_2 + x_1^e = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + x_2^e = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3^e = 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0; x_i^e \geq 0; i = 1, 2, 3,$$

pornind de la soluția de bază obținută în faza 1.

B	c_j	$\bar{x}_j$	-1	1	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	
x_1^e	0	9	0	0	1	1	-1	-
x_1	-1	4	1	0	0	1/3	-2/3	-
x_2	1	1	0	1	0	-1/3	-1/3	-
		-3	0	0	0	-2/3	1/3	

Deoarece în ultima linie mai avem un element pozitiv, soluția obținută: $\bar{x}_1 = 4$; $\bar{x}_2 = 1$; $\bar{x}_1^e = 9$; nu poate fi considerată ca minimă, urmînd a introduce în bază variabila x_3^e .

Dar acest lucru nu este posibil deoarece toți coeficienții lui sînt negativi. În concluzie, funcția $z = -x_1 + x_2$ poate descrește oricît, neavînd un minim finit.

Aceasta se observă și din interpretarea geometrică din figura 155. Oricât am deplasa dreapta Δ_0 paralel cu ea însăși în sensul indicat de săgeată, ea va avea puncte comune cu poligonul P al soluțiilor admisibile. Vîrfurile $A(4, 1)$ corespunde soluției obținută prin metoda simplex: $z = -3$.

Un punct oarecare $M(x_1, x_2)$ situat pe dreapta $x_1 - 2x_2 = 2$, va avea coordonatele $M(2x_2 + 2; x_2)$, iar funcția scop:

$$\begin{aligned} z &= -x_1 + x_2 = \\ &= -2x_2 - 2 + x_2 = -x_2 - 2; \end{aligned}$$

$$\min z = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} (-x_1 + x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} (-x_2 - 2) = -\infty$$

Exemplul 5: Cazul în care minimul nu este unic.

$$\begin{aligned} \min & (-x_1 + x_2) \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Soluție. Scriem programul dat sub forma standard:

$$\begin{aligned} \min & (-x_1 + x_2) \\ & -2x_1 + x_2 + x_1' = 2 \\ & x_1 - x_2 + x_2' = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3' = 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0; x_i' \geq 0; i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Cunoscînd soluția de bază:

$$x_1' = 2; x_2' = 2; x_3' = 5; x_1 = x_2 = 0;$$

se întocmește tabela simplex.

După prima iterație s-a obținut soluția optimă:

$$x_1 = 2; x_2 = 0; x_1' = 6; x_2' = 0; x_3' = 3;$$

$$\min (-x_1 + x_2) = -2.$$

Se constată că, deși optimul funcției scop a fost atins, putem introduce în bază variabila x_2 .

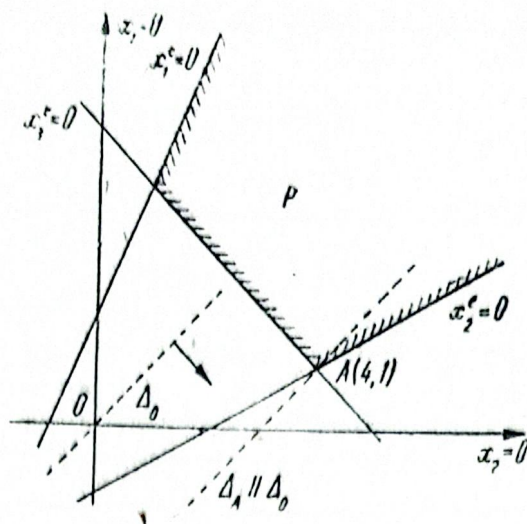


Fig. 155.

Se obține astfel în iterația a doua o nouă soluție optimă:

$$x_1 = \frac{7}{2}; \quad x_2 = \frac{3}{2}; \quad x_1^e = \frac{15}{2}; \quad x_2^e = x_3^e = 0$$

B	c_j	$\bar{x}_j$	-1	1	0	0	0	θ_j
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	
x_1^e	0	2	-2	1	1	0	0	-
x_2^e	0	2	1	-1	0	1	0	2
x_3^e	0	5	1	1	0	0	1	5
		0	1	-1	0	0	0	
x_1^e	0	6	0	-1	1	2	0	-
x_1	-1	2	1	-1	0	1	0	-
x_3^e	0	3	0	2	0	-1	1	3/2
		-2	0	0	0	-1	0	
x_1^e	0	15/2	0	0	1	3/2	1/2	15
x_1	-1	7/2	1	0	0	1/2	1/2	7
x_2	1	3/2	0	1	0	-1/2	1/2	3
		-2	0	0	0	-1	0	

pentru care funcția scop are aceeași valoare minimă:

$$\min (-x_1 + x_2) = -2.$$

Problema dată, avînd două soluții optime, admite o infinitate de soluții optime și anume, mulțimea tuturor punctelor situate pe segmentul $A_1A_2 \parallel \Delta_0$, (fig. 156), dar toate aceste soluții conduc la aceeași valoare minimă a funcției scop. Cum $A_1(2, 0)$; $A_2\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$, aceste soluții sînt:

$$x_1 = 2\lambda_1 + \frac{7}{2}\lambda_2;$$

$$x_2 = \frac{3}{2}\lambda_2;$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$$

$$\min (-x_1 + x_2) = -2.$$

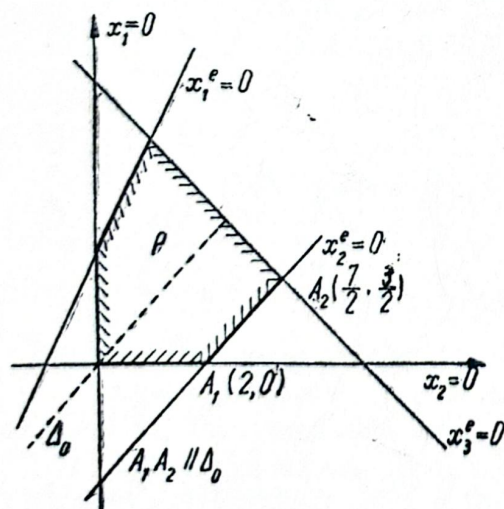


Fig. 156.

Se verifică din nou afirmația: dacă o funcție liniară atinge valoarea optimă în două puncte extreme, ea are aceeași valoare optimă pe mulțimea punctelor situate pe segmentul definit de aceste puncte.

Exemplul 6. Cazul în care soluția este degenerată.

$$\begin{aligned} \min & (-x_1 + x_2) \\ 2x_1 - x_2 & \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 & \leq 2 \\ x_1 + x_2 & \leq 5 \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

Soluție. Întocmai tabela simplex pentru programul adus la formă standard:

$$\begin{aligned} \min & (-x_1 + x_2) \\ 2x_1 - x_2 + x_1^e & = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_2^e & = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3^e & = 5 \\ x_1, x_2 & \geq 0; x_i^e \geq 0; i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

pentru care se cunoaște soluția de bază:

$$x_1^e = 4; x_2^e = 2; x_3^e = 5; x_1 = x_2 = 0.$$

B	c_j	$\bar{x}_j$	-1	1	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	
x_1^e	0	4	2	-1	1	0	0	2
x_2^e	0	2	1	-2	0	1	0	2
x_3^e	0	5	1	1	0	0	1	5
		0	1	-1	0	0	0	
x_1	-1	2	1	-1/2	1/2	0	0	
x_2	0	0	0	-3/2	-1/2	1	0	
x_3	0	3	0	3/2	-1/2	0	1	
		-2	0	-1/2	-1/2	0	0	

După prima iterație s-a obținut soluția optimă:

$$x_1 = 2; x_2 = 0; x_3 = 3;$$

$$x_2 = x_1^e = 0;$$

$$\min (-x_1 + x_2) = -2,$$

care este degenerată, deoarece conține numai două valori strict pozitive x_1 și x_3 , iar $x_2 = 0$.

Degenerarea provine din faptul că prin vârful A_1 al poligonului P al soluțiilor admisibile (fig. 157) trec 3 drepte:

$$x_2 = 0; x_1^e = 0; x_2^e = 0.$$

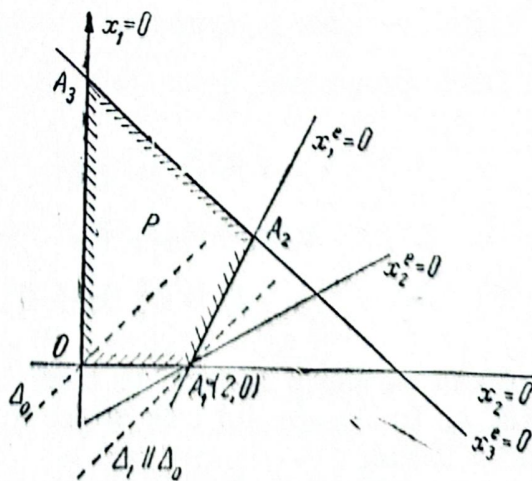


Fig. 157.

În general, fiecărui vîrf al poligonului P îi corespunde o soluție de bază. Soluția va fi degenerată, dacă printr-un același vîrf trec mai mult de două drepte, deoarece în acest caz vom avea mai mult decît două variabile egale cu zero.

Observații. În exemplul dat avem două valori minime egale pentru raportul θ_i . Se putea elimina din bază oricare din cele două variabile x_1^e sau x_2^e . Noi am ales pe x_1^e , deoarece în baza criteriului stabilit de Charnes [2], se elimină din bază variabila situată pe linia cea mai de sus din tabela simplex (prima variabilă din bază care a condus la θ_i minim, care în exemplul dat este x_1^e). Dacă nu se ține seama de acest criteriu se ajunge la aceeași soluție optimă, după un număr mai mare de iterații.

În exemplul dat ar fi fost necesare următoarele două iterații:

B	c_i	$\bar{x}_i$	-1	1	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_1^e	x_2^e	x_3^e	
x_1^e	0	4	2	-1	1	0	0	2
x_2^e	0	2	1	-2	0	1	0	2
x_3^e	0	5	1	1	0	0	1	5
		0	1	-1	0	0	0	
x_1^e	0	0	0	3	1	-2	0	0
x_1	-1	2	1	-2	0	1	0	-
x_3^e	0	3	0	3	0	-1	1	1
		-2	0	1	0	-1	0	
x_2	1	0	0	1	1/3	-2/3	0	
x_1	-1	2	1	0	2/3	-1/3	0	
x_3^e	0	3	0	0	-1	1	1	
		-2	0	0	-1/3	-1/3	0	

După iterația a doua se ajunge la aceeași soluție optimă:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 0; \quad x_3^e = 3; \quad x_1^e = x_2^e = 0; \quad \min (-x_1 + x_2) = -2.$$

Cazul în care se introduce o singură variabilă artificială.

Dacă programul liniar este de forma:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_i^e = b_i; \quad (41)$$

$$b_i > 0; \quad x_i^e \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

se poate obține o soluție de bază introducînd o singură variabilă artificială x_0 , în fiecare din cele m ecuații ale sistemului (41). Sistemul de restricții devine:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_i^e + x_0 = b_i. \quad (42)$$

Fie $b_k = \max \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Scăzând din ecuația k , toate celelalte ecuații ale sistemului (42), se obține programul:

$$F = (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) + x_0 \rightarrow \min$$

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n - x_k^* + x_0 = b_k$$

$$(a_{i1} - a_{i1})x_1 + \dots + (a_{in} - a_{in})x_n + x_i^* - x_k^* = b_i - b_k;$$

care, pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$; $x_k^* = 0$, admite soluția de bază:

$$x_0 = b_k > 0; x_i^* = b_k - b_i \geq 0; i \neq k = 1, 2, \dots, m.$$

Această metodă are avantajul că reduce cu $m - 1$ numărul coloanelor din tabela simplex, micșorând în mod apreciabil volumul de calcule.

Exemplul 7. Să se rezolve programul liniar standard:

$$f = 6x_1 + 7x_2 \rightarrow \min.$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_5 = 2 \quad (43)$$

$$10x_1 + x_2 - x_6 = 5$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, 6.$$

Soluție. Folosind procedeul indicat, introducem variabila artificială x_0 și programul devine:

$$F = (6x_1 + 7x_2) + x_0 \rightarrow \min$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_0 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_0 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_5 + x_0 = 2$$

$$10x_1 + x_2 - x_6 + x_0 = 5.$$

Cum $\max \{3, 6, 2, 5\} = 6$, se scad din ecuația a doua celelalte ecuații și se obține programul:

$$F = (6x_1 + 7x_2) + x_0 \rightarrow \min$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_0 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_3 = 3$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 4$$

$$-6x_1 + 2x_2 - x_4 + x_6 = 1$$

$$x_j \geq 0; x_0 > 0; j = 1, 2, \dots, 6;$$

care admite soluția de bază:

$$x_0 = 6; x_3 = 3; x_5 = 4; x_6 = 1; x_1 = x_2 = x_4 = 0.$$

Aplicînd metoda celor două faze, se obține succesiv:

Faza 1

B	c_j	$\bar{x}_j$	0	0	0	0	0	0	1	θ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0	
x_0	1	6	4	3	0	-1	0	0	1	3/2
x_3	0	3	1	2	1	-1	0	0	0	3
x_5	0	4	3	1	0	-1	1	0	0	4/3
x_6	0	1	-6	2	0	-1	0	1	0	-
		6	4	3	0	-1	0	0	0	
x_0	1	2/3	0	5/3	0	1/3	-4/3	0	1	2/5
x_3	0	5/3	0	5/3	1	-2/3	-1/3	0	0	1
x_1	0	4/3	1	1/3	0	-1/3	1/3	0	0	4
x_6	0	9	0	4	0	-3	2	1	0	9/4
		2/3	0	5/3	0	1/3	-4/3	0	0	
x_2	0	2/5	0	1	0	1/5	-4/5	0		
x_3	0	1	0	0	1	-1	1	0		
x_1	0	6/5	1	0	0	-2/5	3/5	0		
x_6	0	37/5	0	0	0	-19/5	26/5	1		
		0	0	0	0	0	0	0		

Faza 2

B	c_j	$\bar{x}_j$	6 7 0 0 0 0						θ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	7	2/5	0	1	0	1/5	-4/5	0	
x_3	0	1	0	0	1	-1	1	0	
x_1	6	6/5	1	0	0	-2/5	3/5	0	
x_6	0	37/5	0	0	0	-19/5	26/5	1	
		10	0	0	0	-1	-2	0	

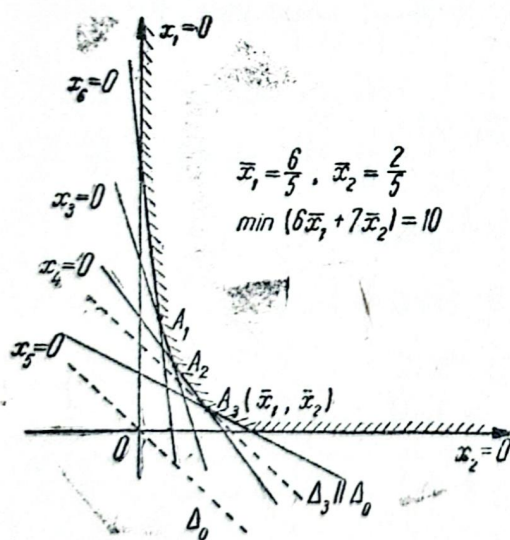


Fig. 158.

Soluția optimă obținută în faza 1 după două iterații, este optimă și pentru faza 2:

$$\bar{x}_1 = \frac{6}{5}; \bar{x}_2 = \frac{2}{5}; \bar{x}_3 = 1;$$

$$\bar{x}_4 = \bar{x}_5 = 0; \bar{x}_6 = \frac{37}{5}$$

$$\min (6x_1 + 7x_2) = 6\bar{x}_1 + 7\bar{x}_2 = 10.$$

În figura 158 se poate vedea și soluția geometrică, care ne conduce la același rezultat.

Observații. Dacă am fi introdus câte o variabilă pentru fiecare ecuație, tabela simplex ar fi conținut $n + m = 6 + 4 = 10$ coloane și 4 variabile artificiale: $x_1^a, x_2^a, x_3^a, x_4^a$.

Dăm mai jos soluția problemei în acest caz.

Faza 1

B	c_j	$\bar{x}_j$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	θ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a	x_2^a	x_3^a	x_4^a	
x_1^a	1	3	3	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	1
x_2^a	1	6	4	3	0	-1	0	0	0	1	0	0	3/2
x_3^a	1	2	1	2	0	0	-1	0	0	0	1	0	2
x_4^a	1	5	10	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	1/2
		16	18	7	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	
x_1^a	1	3/2	0	7/10	-1	0	0	3/10	1	0	1		15/7
x_2^a	1	4	0	13/5	0	-1	0	4/10	0	1	0		20/13
x_3^a	1	3/2	0	19/10	0	0	-1	1/10	0	0	1		15/19
x_1	0	1/2	1	1/10	0	0	0	-1/10	0	0	0		5
		7	0	26/5	-1	-1	-1	4/5	0	0	0		
x_1^a	1	18/19	0	0	-1	0	7/19	5/19	1	0	0		18/7
x_2^a	1	37/19	0	0	0	-1	26/19	5/19	0	1			37/26
x_2	0	15/19	0	1	0	0	-10/19	1/19	0	0			-
x_1	0	8/19	1	0	0	0	1/19	-2/19	0	0			8
		55/19	0	0	-1	-1	33/19	10/19	0	0			
x_1^a	1	11/26	0	0	-1	7/26	0	5/26	1				11/7
x_5	0	37/26	0	0	0	-19/26	1	5/26	0				-
x_2	0	20/13	0	1	0	-5/13	0	4/26	0				-
x_1	0	9/26	1	0	0	1/26	0	-3/26	0				9
		11/26	0	0	-1	7/26	0	5/26					
x_4	0	11/7	0	0	-26/7	1	0	5/7					
x_5	0	18/7	0	0	-19/7	0	1	5/7					
x_2	0	15/7	0	1	-10/7	0	0	3/7					
x_1	0	2/7	1	0	1/7	0	0	-1/7					
		0	0	0	0	0	0	0					

În faza 2 se rezolvă programul (43), pornind de la soluția de bază obținută în prima fază:

$$x_1 = \frac{2}{7}; \quad x_2 = \frac{15}{7}; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = \frac{11}{7}; \quad x_5 = \frac{18}{7}; \quad x_6 = 0.$$

S-a obținut aceeași soluție, după 6 iterații. Folosind procedeul indicat, soluția optimă a fost obținută pe o tabelă simplex redusă (cu 7 coloane în loc de 10), numai după două iterații.

Cele 3 soluții de bază obținute în faza 2, corespund celor 3 vîrfuri A_1 , A_2 , A_3 ale poligonului soluțiilor admisibile (fig. 158):

$$A_1\left(\frac{2}{7}, \frac{15}{7}\right); A_2\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right); A_3\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

Faza 2

B	c_j	x_j	6	7	0	0	0	0	θ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	11/7	0	0	-26/7	1	0	5/7	11/5
x_5	0	18/7	0	0	-19/7	0	1	5/7	18/5
x_2	7	15/7	0	1	-10/7	0	0	3/7	5
x_1	6	2/7	1	0	1/7	0	0	-1/7	-
		117/5	0	0	-64/7	0	0	15/7	
x_6	0	11/5	0	0	-26/5	7/5	0	1	-
x_5	0	1	0	0	1	-1	1	0	1
x_2	7	6/5	0	1	4/5	-3/5	0	0	3/2
x_1	6	3/5	1	0	-3/5	1/5	0	0	-
		12	0	0	2	-3	0	0	
x_5	0	37/5	0	0	0	-19/5	26/5	1	
x_3	0	1	0	0	1	-1	1	0	
x_2	7	2/5	0	1	0	1/5	-4/5	0	
x_1	6	6/5	1	0	0	-2/5	3/5	0	
		10	0	0	0	-1	-2	0	

Dacă ținem seama că:

— pentru a determina un element din tabela simplex sînt necesare 4 operațiuni elementare la fiecare schimbare a bazei (două înmulțiri, o scădere și o împărțire, efectuate în baza formulei (21));

— elementele situate pe linia pivotului necesită o singură operație de împărțire (efectuată în baza formulei 20);

— elementele situate pe cele m coloane ce corespund variabilelor din bază nu se mai calculează (fiind egale cu elementele corespunzătoare în baza precedentă); se poate arăta că prin procedeul expus, numărul operațiilor elementare se reduce cu:

$$\Delta(m) = (4m + 1)(m - 1)$$

pentru fiecare iterație. În exemplul dat, pentru cele 4 iterații efectuate în plus, s-a realizat o economie de $4 \cdot \Delta(4) = 4 \cdot 17 \cdot 3 = 204$ operațiuni elementare. Eficacitatea metodei este evidentă.

Probleme propuse

1. Să se rezolve grafic și prin metoda simplex problema :

$$\max (2x_1 + x_2)$$

$$x_1 - x_2 \leq 4,$$

$$3x_1 - x_2 \leq 18,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$R. x_1 = \frac{42}{5}, x_2 = \frac{36}{5}, \max (2x_1 + x_2) = 24.$$

2. Folosind metoda celor două faze să se rezolve problema :

$$\max (10x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4)$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 12$$

$$2x_2 + x_3 + 3x_4 = 16$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

R. Se introduc variabilele artificiale x_5, x_6, x_7 . În prima fază se minimizează funcția $\varphi = (x_5 + x_6 + x_7)$; în faza a doua maximizăm funcția dată $z = (10x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4)$.

$$Se\ va\ găsi: x_1 = \frac{17}{3}, x_2 = \frac{77}{12}, x_3 = \frac{19}{6}, x_4 = 0; \max z = \frac{217}{12}.$$

3. Să se rezolve programul liniar folosind metoda celor două faze.

$$\max(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4),$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15,$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20,$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 20,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

R. Se introduc variabilele artificiale x_5 și x_6 în primele două restricții. În prima fază se minimizează funcția $\varphi = x_5 + x_6$; iar în faza a doua se maximizează funcția dată: $z = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4)$. Se va găsi:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{5}{2}; x_4 = 0; \max z = 15.$$

4. Un meniu trebuie să conțină cel puțin 0,6 unități din substanța nutritivă A; 0,9 unități din substanța B; 3 unități din substanța C și 2,5 unități din substanța D. Aceste substanțe se găsesc în două alimente M și N. Să se determine cantitățile x_1 și x_2 din alimentele M și N,

astfel încît costul meniului să fie minim, folosind datele din tabela de mai jos :

Alimente Substanțe	M (x_1)	N (x_2)	Necesar biologic
A	0,15	0	0,6
B	0	0,15	0,9
C	0,15	0,30	3
D	0,30	0,15	2,55
Preț unitar	10	4	—

R. Se va găsi: $x_1 = 4$; $x_2 = 9$; costul minim al meniului, 76 lei.

5. La o fermă agricolă s-a planificat o suprafață de 300 ha teren arabil pentru cultivarea cu grâu și porumb.

Pentru cultivarea unui hectar de grâu se cheltuiește în medie 350 lei, iar pentru cultivarea unui hectar de porumb 200 lei.

Se presupune că recolta medie la grâu este de 2 500 kg/ha și la porumb este de 3 250 kg/ha.

Beneficiul obținut din vânzarea grâului este de 0,80 lei/kg, iar al porumbului 0,50 lei/kg.

În planul de cheltuieli s-a prevăzut suma de 70 000 lei pentru ambele culturi.

Se cere să se determine numărul de hectare x_1 și x_2 care trebuie cultivate cu grâu și respectiv cu porumb, pentru ca beneficiul total obținut din vânzarea recoltei să fie maxim.

R. $x_1 = 66 \frac{2}{3}$ ha grâu, $x_2 = 233 \frac{1}{3}$ ha porumb, $B_{\max} = 512\,500$ lei.

CAPITOLUL X

PROBLEMA TRANSPORTURILOR

§ 1. Enunțul problemei

Fie: $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ m centre de producție unde avem disponibil un produs omogen în cantitățile $a_1, a_2, \dots, a_m$;

$B_j (j = 1, 2, \dots, n)$, n centre de consum unde acel produs este necesar în cantitățile $b_1, b_2, \dots, b_n$;

$d_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ distanțele de la centrele de producție A_i la centrele de consum B_j ;

c_{ij} , costul transportului unei tone din produsul considerat pe distanța d_{ij} , exprimat în lei/tonă (sau în general, în lei/unitate de produs transportat);

x_{ij} , cantitățile din produsul considerat ce urmează a fi transportate din centrele de producție A_i la centrele de consum B_j . Problema cere să se determine cantitățile de produse x_{ij} ce urmează a fi transportate din A_i în B_j , astfel încât totalul cheltuielilor de transport să fie minim.

§ 2. Modelul matematic

Ținând seama de enunțul problemei se impun următoarele restricții:

— Cantitatea totală de produse expediate din A_i spre cele n centre de consum B_j trebuie să fie egală cu disponibilul din A_i . Se obține astfel sistemul:

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

de m ecuații liniare cu $m \cdot n$ necunoscute, în care primul indice i al necunoscutelor x_{ij} reprezintă centrul de producție (expediție), iar al doilea j , centrul de consum (primire).

— Cantitatea totală de produse primită de centrul B_j de la cele m centre de expediție trebuie să fie egală cu necesarul centrului de consum B_j .

Se obține sistemul de n ecuații liniare cu $m \cdot n$ necunoscute:

$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

— Cantitățile transportate trebuie să satisfacă condițiile de nenegativitate:

$$x_{i1} \geq 0; x_{i2} \geq 0, \dots, x_{in} \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

— Problema cere ca planul de transport să se realizeze cu un minim de cheltuieli.

Funcția care reprezintă totalul cheltuielilor necesare efectuării transportului trebuie să fie minimă:

$$f = c_{11}x_{11} + \dots + c_{m1}x_{m1} + \dots + c_{mn}x_{mn}. \quad (4)$$

— Întreaga cantitate de produse disponibilă în cele m centre de producție trebuie să fie expedită în întregime celor n centre de consum:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n. \quad (5)$$

Se obține astfel următorul *model matematic*:

Să se minimizeze funcția:

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (6)$$

în condițiile:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = S. \quad (10)$$

Funcția (6) a cărei minim se caută se numește funcția scop (criteriu). Relațiile (7), (8), (10) se numesc restricțiile problemei, iar (9) reprezintă condițiile de nenegativitate.

Folosind tabela 1, modelul unei probleme de transport se poate obține astfel:

Tabela 1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	...	B_n	a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	S

— Egalăm suma necunoscutelor x_{ij} din fiecare linie cu cantitățile a_i scrise în ultima coloană și obținem ecuațiile (7).

— Egalăm suma necunoscutelor x_{ij} din fiecare coloană cu cantitățile b_j scrise în ultima linie și obținem ecuațiile (8).

— Suma produselor dintre costurile c_{ij} și necunoscutele x_{ij} scrise în fiecare pătrățel (celulă) reprezintă funcția scop (6), al cărei minim se cere.

— Suma cantităților a_i din ultima coloană egalată cu suma cantităților b_j din ultima linie ne conduce la relația (10).

§ 3. Clasificarea soluțiilor

Modelul unei probleme de transport conține un sistem de $m + n$ ecuații liniare cu mn necunoscute. Dacă ținem seama de relația (10) sistemul va conține numai $m + n - 1$ ecuații liniar independente cu mn necunoscute.

Cum pentru $m > 1$; $n > 1$; $m, n \in N$, avem satisfăcută relația¹:

$$m + n - 1 \leq mn,$$

rezultă că numărul ecuațiilor distincte în orice problemă de transport este mai mic decât numărul necunoscutelor.

Sistemul (7), (8) este nedeterminat și admite deci o infinitate de soluții.

— Soluțiile care satisfac (7) și (8) dar nu satisfac (9) se numesc neadmisibile (nerealizabile).

— Soluțiile care satisfac (7), (8) și (9) se numesc *admisibile* (realizabile).

— Acele soluții admisibile care conțin cel mult $m + n - 1$ valori $x_{ij} > 0$, celelalte $(m - 1)(n - 1)$ fiind nule se numesc *soluții de bază*.

— Soluțiile admisibile care conțin exact $m + n - 1$ valori $x_{ij} > 0$, celelalte $(m - 1)(n - 1)$ fiind nule se numesc *soluții de bază nedegenerate*.

— Soluțiile admisibile care conțin $(m + n - 1) - r$ valori $x_{ij} > 0$, se numesc *soluții de bază degenerate*, $r \geq 1$ fiind ordinul de degenerare².

— Acea soluție de bază nedegenerată (sau degenerată) care conduce la un maxim sau la un minim al funcției scop se numește *soluție optimă*.

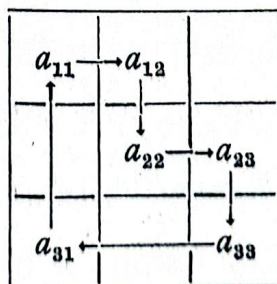
Ciclu. Numim ciclu un număr par de celule distincte de forma:

$$a_{i_1 j_1}, a_{i_1 j_2}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_k j_k}, a_{i_k j_1}.$$

De exemplu, ciclul format din celulele:

$$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23}, a_{33}, a_{31},$$

marcat prin săgeți în schema de mai jos, conține 6 celule.



¹ Dacă o vom scrie sub forma $n - 1 < m(n - 1)$ și ținem seama de condiția $n > 1$, rezultă $m > 1$, ceea ce justifică afirmația noastră.

² Dacă $r = 1, 2, \dots, k$ vom spune că avem o degenerare simplă, dublă, ..., multiplă de ordinul k .

Celulele a_{11} , a_{22} , a_{33} , care ocupă locurile 1, 3, 5 în ciclu le vom numi celule impare, iar celulele a_{12} , a_{23} , a_{31} , care ocupă locurile 2, 4, 6 le vom numi celule pare.

Bază. Fie $X^0 = (x_{ij}^0)$ o soluție de bază a unei probleme de transport. Numim bază și o notăm cu B mulțimea celulelor a_{ij} ce conțin numai valori $x_{ij} > 0$.

O bază poate conține cel mult $m + n - 1$ celule a_{ij} și cel puțin n (dacă problema admite o degenerare multiplă de ordinul $m - 1$). Dacă o soluție de bază este nedegenerată, se poate arăta că pentru fiecare celulă ce corespunde unei valori $x_{ij} = 0$, există un *ciclu unic* care conține această celulă, celelalte celule ce compun ciclul fiind ocupate numai de valori $x_{ij} > 0$.

Evaluarea unei celule. Prin definiție evaluarea unei celule $a_{ij} \notin B$, pe care o vom nota s_{ij} este dată de expresia:

$$s_{ij} = c_{ij} - c_{ij_1} + c_{i_1j_1} - c_{i_1j_2} + \dots + c_{i_kj_k} - c_{i_kj}.$$

Exemplu. Folosind datele din schema de mai jos, evaluarea celulei a_{25} (în care $x_{25} = 0$) este dată de relația:

c_{11} x_{11}				$-c_{15}$ x_{15}
			c_{24} x_{24}	$\rightarrow c_{25}$ 0
c_{31} x_{31}			$\rightarrow c_{34}$ x_{34}	

$$s_{25} = c_{25} - c_{15} + c_{11} - c_{31} + c_{34} - c_{24}.$$

Se arată că evaluarea unei celule a_{ij} reprezintă cantitatea cu care se modifică (crește sau se reduce) funcția scop dacă a_{ij} crește cu o unitate.

În exemplul dat, valoarea funcției scop ce corespunde celulei a_{25} după majorarea lui x_{25} cu o unitate va fi:

$$f_1(a_{25}) = c_{25} \cdot 1 + c_{15}(x_{15} - 1) + c_{11}(x_{11} + 1) + c_{31}(x_{31} - 1) + c_{34}(x_{34} + 1) + c_{24}(x_{24} - 1).$$

$$f_1(a_{25}) = (c_{15}x_{15} + c_{11}x_{11} + c_{31}x_{31} + c_{34}x_{34} + c_{24}x_{24}) + (c_{25} - c_{15} + c_{11} - c_{31} + c_{34} - c_{24}).$$

$$f_1(a_{25}) = f_0(a_{25}) + s_{25} \quad (11)$$

în care $f_0(a_{25})$ reprezintă funcția scop în ipoteza în care am presupus $x_{25} = 0$. Din relația (11) rezultă că funcția scop a crescut (sau s-a redus) cu cantitatea s_{25} după cum $s_{25} > 0$ (sau $s_{25} < 0$).

Deoarece am majorat pe x_{25} , am scăzut și am adunat alternativ o unitate cînd am trecut de la un colț la altul al ciclului. În acest mod ecuațiile (7) și (8) rămîn satisfăcute.

§ 4. Determinarea unei soluții inițiale

Pentru a rezolva o problemă de transport se pornește de la o soluție inițială de bază care se obține astfel:

— Se dă unei variabile oarecare x_{ij} valoarea:

$$\bar{x}_{ij} = \min \{a_i, b_j\}.$$

— Dacă $a_i < b_j$; $\bar{x}_{ij} = a_i$. Se suprimă linia i , iar b_j se va înlocui cu $b_j^{(1)} = b_j - a_i$.

— Dacă $a_i > b_j$; $\bar{x}_{ij} = b_j$. Se suprimă coloana j , iar a_i se va înlocui cu $a_i^{(1)} = a_i - b_j$.

Se obține astfel un tabel redus cu o linie (sau cu o coloană) față de tabelul inițial. Procedul se repetă pînă cînd toate centrele de consum au fost satisfăcute.

Distingem următoarele cazuri particulare mai importante:

1°. *Metoda colțului nord-vest*¹. Se alege variabila x_{11} situată pe prima linie și prima coloană (în colțul nord-vest al tablei).

Dacă $\min \{a_1, b_1\} = a_1$, atunci $\bar{x}_{11} = a_1$; $\bar{x}_{12} = \bar{x}_{13} = \dots = \bar{x}_{1n} = 0$.

Se suprimă prima linie și se determină $\bar{x}_{21}$ din relația:

$$\bar{x}_{21} = \min \{a_2, b_1 - a_1\}.$$

Dacă $\min \{a_1, b_1\} = b_1$, atunci $\bar{x}_{11} = b_1$; $\bar{x}_{21} = \bar{x}_{31} = \dots = \bar{x}_{m1} = 0$.

Se suprimă prima coloană și se determină $\bar{x}_{12}$ din relația:

$$\bar{x}_{12} = \min \{a_1 - b_1, b_2\}.$$

Procedul se repetă determinînd succesiv valorile x_{ij} situate pe prima linie și prima coloană rămasă nesuprimată.

2°. *Metoda costului minim pe linie*. Se alege variabila x_{1j} situată pe prima linie ce corespunde celulei în care costul c_{1j} este minim:

$$c_{1k} = \min \{c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}\}; \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Se determină apoi $\bar{x}_{1k}$ din relația:

$$\bar{x}_{1k} = \min \{a_1, b_k\}.$$

Dacă $a_1 < b_k$; $\bar{x}_{1k} = a_1$; $\bar{x}_{11} = \bar{x}_{12} = \dots = \bar{x}_{1, k-1} = \bar{x}_{1, k+1} = \dots = \bar{x}_{1n} = 0$; se suprimă prima linie și procedul se repetă cu linia a doua.

Dacă $a_1 > b_k$; $\bar{x}_{1k} = b_k$; $\bar{x}_{2k} = \bar{x}_{3k} = \dots = \bar{x}_{mk} = 0$; se suprimă coloana k și procedul se continuă, alegînd variabila x_{1j} situată pe prima linie ce corespunde costului minim rămas după suprimarea coloanei k . Procedul se repetă pînă cînd toate valorile x_{ij} situate pe prima linie au fost determinate.

Se continuă apoi în mod analog și cu celelalte linii.

3°. *Metoda costului minim pe coloană*. Se alege variabila x_{r1} situată pe prima coloană ce corespunde celulei în care costul c_{r1} este minim:

$$c_{r1} = \min \{c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m1}\}; \quad r \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Se determină apoi $\bar{x}_{r1}$ din relația:

$$\bar{x}_{r1} = \min \{a_r, b_1\}.$$

¹ Propusă de G. B. Dantzig a fost numită de A. Charnes și W. Cooper metoda colțului nord-vest (sau metoda distribuției în scară).

Dacă $a_r < b_1$; $\bar{x}_{r1} = a_r$; $\bar{x}_{r2} = \bar{x}_{r3} = \dots = \bar{x}_{rm} = 0$; se suprimă linia r și procedeul se continuă, alegînd variabila x_{i1} situată pe prima coloană și care corespunde costului minim rămas după suprimarea liniei r .

Dacă $a_r > b_1$; $\bar{x}_{r1} = b_1$; $\bar{x}_{11} = \bar{x}_{21} = \dots = \bar{x}_{r-1,1} = \bar{x}_{r+1,1} = \dots = \bar{x}_{m1} = 0$, se suprimă prima coloană și procedeul se repetă cu coloana a doua.

Se continuă în mod analog și cu celelalte coloane.

4°. *Metoda costului minim al matricei.* Se alege variabila x_{ij} ce corespunde celulei în care costul c_{ij} este minim.

Dacă :

$$c_{rk} = \min_{i,j} \{c_{ij}\},$$

se determină $\bar{x}_{rk}$ din relația :

$$\bar{x}_{rk} = \min \{a_r, b_k\}.$$

Procedeul se repetă în mod analog pînă ce toate valorile x_{ij} au fost determinate.

Oricare din metodele expuse 1°, ..., 4° conduc la determinarea unei soluții de bază, care verifică (7), (8), (9).

Exemplul 1. Să se determine o soluție inițială de bază a problemei de transport ale cărei date au fost trecute în tabela 2.

Tabela 2

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	68 x_{11}	64 x_{12}	48 x_{13}	24 x_{14}	60 x_{15}	36 x_{16}	78
A_2	38 x_{21}	42 x_{22}	44 x_{23}	28 x_{24}	32 x_{25}	34 x_{26}	87
A_3	36 x_{31}	46 x_{32}	52 x_{33}	50 x_{34}	40 x_{35}	22 x_{36}	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

Metoda nord-vest ne conduce la soluția inițială de bază din tabela 3.

Tabela 3

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	a
1	68 24	64 48	48 6	24 0	60 0	36 0	78
2	38 0	42 0	44 28	28 32	32 27	34 0	87
3	36 0	46 0	52 0	50 0	40 41	22 14	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

$f_0 = 9932$

Se constată ușor că relațiile (7), (8) sînt satisfăcute :

— Făcînd suma valorilor x_{ij} pe linii se obțin numerele a_i din ultima coloană.

— Sumele x_{ij} pe coloane sînt egale cu numerele b_j din ultima linie.

Soluția inițială obținută este nedegenerată deoarece conține exact $m + n - 1 = 3 + 6 - 1 = 8$ valori $x_{ij} > 0$.

Valoarea funcției scop pentru această soluție este :

$$f_0 = 68 \cdot 24 + 64 \cdot 48 + 48 \cdot 6 + 44 \cdot 28 + 28 \cdot 32 + 32 \cdot 27 + \\ + 40 \cdot 41 + 22 \cdot 14 = 9932.$$

Exemplul 2. Să se determine o soluție inițială a problemei de transport din tabela 2, folosind metoda elementului minim pe linie.

Folosind procedeul indicat în 2°, se obține succesiv :

$$\min \{c_{ij}\} = c_{14} = 24; j = 1, 2, \dots, 6$$

$$\bar{x}_{14} = \min \{a_1, b_4\} = \min \{32, 78\} = 32.$$

Rezultă :

$$\bar{x}_{14} = 32; \bar{x}_{24} = \bar{x}_{34} = 0.$$

Elementul minim rămas în prima linie după c_{14} este $c_{16} = 36$.

Rezultă :

$$\bar{x}_{16} = \min \{78 - 32, 14\} = 14; \bar{x}_{26} = \bar{x}_{36} = 0.$$

Elementul minim rămas după c_{14} și c_{16} este $c_{13} = 48$.

Rezultă :

$$\bar{x}_{13} = \min \{78 - 32 - 14, 34\} = \min \{32, 34\} = 32.$$

Valorile $\bar{x}_{ij}$ situate pe prima linie au fost complet determinate :

$$\bar{x}_{11} = \bar{x}_{12} = 0; \bar{x}_{13} = \bar{x}_{14} = 32; \bar{x}_{15} = 0; \bar{x}_{16} = 14.$$

Procedînd în mod analog și cu linia a doua și a treia se obține soluția inițială de bază din tabela 4.

Tabela 4

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	a_i
1	68 0	64 0	48 32	24 32	60 0	36 14	78
2	38 19	42 0	44 0	28 0	32 68	34 0	87
3	36 5	46 48	52 2	50 0	40 0	22 0	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

$$f_0 = 8198$$

Funcția scop are valoarea :

$$f_0 = 48 \cdot 32 + 24 \cdot 32 + 36 \cdot 14 + 38 \cdot 19 + 32 \cdot 68 + 36 \cdot 5 + \\ + 46 \cdot 48 + 52 \cdot 2 = 8\,198.$$

Exercițiu. Să se determine o soluție inițială de bază și valoarea funcției scop corespunzătoare, folosind metoda elementului minim pe coloană și metoda elementului minim al matricei.

R. Metoda elementului minim pe coloană ne conduce la soluția :

$$\bar{x}_{14} = \bar{x}_{15} = 32; \quad \bar{x}_{16} = 14; \quad \bar{x}_{22} = 48; \quad \bar{x}_{23} = 34; \quad \bar{x}_{25} = 5; \quad \bar{x}_{31} = 24; \\ \bar{x}_{35} = 31,$$

celelalte valori $\bar{x}_{ij}$ fiind egale cu zero $f_0 = 8\,968$.

Metoda elementului minim al matricei ne dă soluția :

$$\bar{x}_{12} = 12; \quad \bar{x}_{13} = 34; \quad \bar{x}_{14} = 32; \quad \bar{x}_{22} = 19; \quad \bar{x}_{25} = 68; \quad \bar{x}_{31} = 24; \quad \bar{x}_{32} = 17;$$

$\bar{x}_{36} = 14$, celelalte valori $\bar{x}_{ij}$ fiind egale cu zero. $f_0 = 8\,368$.

* * *

După obținerea unei soluții inițiale de bază, prin una din metodele expuse, se procedează la verificarea ei pentru a ști dacă este optimă.

În cazul în care se constată că nu este optimă se trece la îmbunătățirea ei, micșorînd funcția scop dacă se cere minimizarea ei, sau majorînd-o dacă se caută maximum.

În acest scop vom expune :

§ 5. Metoda distributivă modificată

elaborată de A. Charnes și W. Cooper

Se consideră toate costurile c_{ij} ce corespund celor $m + n - 1$ valori $x_{ij} > 0$ din soluția inițială de bază ($x_{ij} \in B$).

Fiecăruia din aceste costuri îi asociem cîte o pereche de numere (u_i, v_j) astfel încît :

$$u_i + v_j = c_{ij}. \quad (12)$$

Se determină apoi u_i și v_j rezolvînd sistemul (12), care este format din $m + n - 1$ ecuații cu $m + n$ necunoscute.

Pentru a obține o soluție unică a acestui sistem se dă în mod arbitrar uneia din necunoscute valoarea zero (de exemplu, facem $u_1 = 0$). Se rezolvă apoi sistemul găsind pentru u_i și v_j valori unice.

Folosind soluțiile găsite $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$ se determină costurile $\bar{c}_{ij}$ ce corespund valorilor $x_{ij} = 0$, astfel încît :

$$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j. \quad (13)$$

Calcululele necesare pentru a rezolva sistemul (12) și pentru a găsi valorile $\bar{c}_{ij}$ se fac direct pe tabela 5.

Tabela 5

$u_i \backslash v_j$	v_1	v_2	$\dots$	v_n
u_1	c_{11} $\bar{c}_{11}$	c_{12} $\bar{c}_{12}$	$\dots$ $\dots$	c_{1n} $\bar{c}_{1n}$
u_2	c_{21} $\bar{c}_{21}$	c_{22} $\bar{c}_{22}$	$\dots$ $\dots$	c_{2n} $\bar{c}_{2n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_m	c_{m1} $\bar{c}_{m1}$	c_{m2} $\bar{c}_{m2}$	$\dots$ $\dots$	c_{mn} $\bar{c}_{mn}$

§. 5.1. Verificarea optimalității. A verifica optimalitatea unei soluții (în cazul în care se cere minimul funcției scop) înseamnă a arăta că oricare altă soluție conduce la o valoare mai mare a funcției scop și în consecință nu mai poate fi redusă. Pentru aceasta se calculează evaluarea s_{ij} pentru celulele ce corespund valorilor $x_{ij} = 0$.

Să considerăm ciclul $C(2, 5) = \{c_{25}, c_{15}, c_{11}, c_{31}, c_{34}, c_{24}\}$, ce corespunde celulei a_{25} pentru care avem $x_{25} = 0$ și să presupunem că $x_{25} = \alpha > 0$. Dacă notăm cu $f_{25}(0)$ și $f_{25}(\alpha)$ valoarea funcției scop pentru $x_{25} = 0$ și $x_{25} = \alpha$ și folosim schema de mai jos se obține:

c_{11} $x_{11} + \alpha$				c_{15} $x_{15} - \alpha$
			c_{24} $x_{24} - \alpha$	c_{25} α
c_{31} $x_{31} - \alpha$			c_{34} $x_{34} + \alpha$	

$$f_{25}(\alpha) = \alpha c_{25} + c_{15}(x_{15} - \alpha) + c_{11}(x_{11} + \alpha) + c_{31}(x_{31} - \alpha) + c_{34}(x_{34} + \alpha) + c_{24}(x_{24} - \alpha) = (c_{15}x_{15} + c_{11}x_{11} + c_{31}x_{31} + c_{34}x_{34} + c_{24}x_{24}) + \alpha(c_{25} - c_{15} + c_{11} - c_{31} + c_{34} - c_{24}).$$

$$f_{25}(\alpha) = f_{25}(0) + \alpha s_{25}. \quad (14)$$

În general, se va obține o relație de forma:

$$f_{ij}(\alpha) = f_{ij}(0) + \alpha s_{ij}; \quad \alpha > 0 \quad (15)$$

pentru toate celulele ce corespund valorilor $x_{ij} = 0$.

Rezultă că:

$$- \text{Dacă } s_{ij} > 0, \text{ pentru toate celulele } a_{ij} \text{ în care } x_{ij} = 0 \quad (16)$$

$$\text{și } s_{ij} = 0, \text{ pentru toate celulele } a_{ij} \text{ în care } x_{ij} > 0 \quad (17)$$

funcția scop nu se mai poate reduce; ea este optimă (minimă) și unică.

— Dacă (16) și (17) sînt satisfăcute, dar avem și $s_{ij} = 0$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$, problema admite o infinitate de soluții minime, care conduc la aceeași valoare minimă a funcției scop. Pentru a justifica această afirmație să observăm că, dacă $s_{ij} = 0$, din (15) rezultă:

$$f_{ij}(\alpha) = f_{ij}(0); \quad \alpha > 0,$$

iar condițiile de nenegativitate conduc la următorul sistem de inecuații:

$$x_{15} - \alpha \geq 0; \quad x_{31} - \alpha \geq 0; \quad x_{24} - \alpha \geq 0; \quad \alpha \geq 0 \quad (18)$$

ale cărui soluții depind de valorile lui x_{15} , x_{31} , x_{24} .

Dacă presupunem:

$$0 < x_{15} < x_{31} < x_{24},$$

se obține soluția*:

$$\alpha \in [0, x_{15}].$$

Problema de transport va admite o infinitate de soluții care se obțin dînd lui α toate valorile reale cuprinse în intervalul $[0, x_{15}]$.

Dacă soluțiile problemei nu au sens decît în numere întregi, ea va admite un număr finit de soluții și anume soluțiile ce corespund numerelor naturale situate în intervalul $[0, x_{15}]$.

— Dacă $s_{ij} < 0$, pentru unele celule a_{ij} în care $s_{ij} = 0$, soluția nu este optimă, ea poate fi redusă cu cantitatea αs_{ij} .

Dacă ținem seama de expresia lui s_{ij} și de valorile lui c_{ij} și $\bar{c}_{ij}$ din (12) și (13) se obține:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= c_{ij} - c_{ij_1} + c_{i_1j_1} - c_{i_1j_2} + \dots + c_{i_kj_k} - c_{i_kj} = c_{ij} - (u_i + v_{j_1} - u_{i_1} - \\ &\quad - v_{j_1} + u_{i_1} + v_{j_2} - \dots - u_{i_k} - v_{j_k} + u_{i_k} + v_j). \\ s_{ij} &= c_{ij} - (u_i + v_j) = c_{ij} - \bar{c}_{ij}. \end{aligned}$$

Relația $s_{ij} = c_{ij} - \bar{c}_{ij}$ ne arată că verificarea optimalității se poate face cu ajutorul costurilor c_{ij} și $\bar{c}_{ij}$ calculate în tabela 5.

Concluzie. Verificarea optimalității se face astfel:

Se întocmește tabela 5, calculînd valorile u_i , v_j și costurile $\bar{c}_{ij}$ pentru acele celule în care $x_{ij} = 0$, folosind ecuațiile (12) și (13).

Se compară c_{ij} cu $\bar{c}_{ij}$.

— Dacă $c_{ij} > \bar{c}_{ij}$, pentru celulele în care $x_{ij} = 0$, (19)

$c_{ij} = \bar{c}_{ij}$, pentru celulele în care $x_{ij} > 0$, (20)

soluția este optimă (minimă) și unică.

— Dacă (19) și (20) sînt satisfăcute, dar avem și $c_{ij} = \bar{c}_{ij}$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$, problema admite o infinitate de soluții minime, care conduc la aceeași valoare minimă a funcției scop.

— Dacă $c_{ij} < \bar{c}_{ij}$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$, soluția nu este optimă, ea poate fi îmbunătățită (funcția scop se poate reduce).

* În general, α poate lua o infinitate de valori cuprinse într-unul din intervalele $[0, x_{31}]$ sau $[0, x_{24}]$ după cum $x_{31} < x_{24} < x_{15}$ sau $x_{24} < x_{15} < x_{31}$.

§. 5.2. **Îmbunătățirea soluției.** Dacă pentru o celulă oarecare a_{ij} în care $x_{ij} = 0$, avem $c_{ij} < \bar{c}_{ij}$, atunci evaluarea acelei celule va fi $s_{ij} = c_{ij} - \bar{c}_{ij} < 0$.

Din relația (15) se constată că valoarea inițială a funcției scop se va reduce cu cantitatea αc_{ij} .

Pentru ca reducerea să fie maximă va trebui să luăm pentru α valoarea maximă posibilă, astfel încât în noua soluție valorile x_{ij} să fie nenegative.

În exemplul dat, va trebui să avem satisfăcute condițiile (18).

Pentru aceasta va fi suficient să luăm:

$$\alpha = \min(x_{15}, x_{31}, x_{24}).$$

Dacă vom presupune $x_{15} < x_{31} < x_{24}$, atunci $\max \alpha = x_{15}$.

Se constată că $\max \alpha$ este egal minimul valorilor x_{ij} situate în colțurile pare ale ciclului ce corespunde celulei $a_{25} \notin B$, a cărei evaluare $s_{25} < 0$.

Noua soluție îmbunătățită ce corespunde ciclului $C(2, 5)$, va fi:

$$x'_{25} = x_{15}; x'_{15} = 0; x'_{11} = x_{11} + x_{15};$$

$$x'_{31} = x_{31} - x_{15}; x'_{34} = x_{34} + x_{15}; x'_{24} = x_{24} - x_{15}.$$

Această operație constituie un pas (o iterație). După un număr finit de pași (de iterații succesive) se ajunge la soluția optimă, condițiile de optimalitate vor fi satisfăcute.

Exemplu. Să se determine o soluție optimă (minimă) pentru programul de transport din tabela 2, cunoscând soluția inițială din tabela 6.

Verificarea optimalității. Folosind procedeul indicat se întocmește tabela 7 în modul următor:

1. Se trec costurile c_{ij} ce corespund celulelor în care $x_{ij} > 0$ (în colțul din stînga sus).

Tabela 6

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	a_i
1	68 0	64 31	48 34	24 13	60 0	36 0	68
2	38 0	42 0	44 0	28 19	32 68	34 0	87
3	36 24	46 17	52 0	50 0	40 0	22 14	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

$$f_0 = 8590$$

2. Se determină numerele u_i și v_j ($i = 1, 2, \dots, 6$; $j = 1, 2, 3$) folosind ecuațiile (12). Pentru a obține pentru u_i și v_j valori unice se consideră $u_1 = 0$, apoi se deduce:

$$v_2 = 64; v_3 = 48; v_4 = 24; u_2 = 28 - 24 = 4; v_5 = 32 - 4 = 28;$$

$$u_3 = 46 - 64 = -18; v_1 = 36 + 18 = 54; v_6 = 22 + 18 = 40.$$

3. Folosind relațiile (13) se calculează costurile $\bar{c}_{ij}$ ce corespund celulelor în care $x_{ij} = 0$ (trecute în colțul din dreapta jos).

4. Se trec apoi și costurile $\bar{c}_{ij} = c_{ij}$ ce corespund valorilor $x_{ij} > 0$ (tot în colțul din dreapta jos).

Tabela 7

$v_j \backslash u_i$	54	64	48	24	28	40
0	68 54	64 64	48 48	24 24	60 28	36 40
4	38 58	42 68	44 52	28 28	32 32	34 44
-18	36 36	46 46	52 30	50 6	40 10	22 22

5. Se compară costurile c_{ij} (scrise în colțul din stînga sus) cu costurile $\bar{c}_{ij}$ (scrise în colțul din dreapta jos). Se constată că soluția inițială dată în tabela 6 nu este optimă deoarece în celulele a_{16} , a_{21} , a_{22} , a_{23} , a_{26} avem:

$$c_{16} < \bar{c}_{16}; c_{21} < \bar{c}_{21}; c_{22} < \bar{c}_{22}; c_{23} < \bar{c}_{23}; c_{26} < \bar{c}_{26}.$$

Îmbunătățirea soluției. Se cercetează evaluările celor 5 celule în care condiția de optimalitate nu este satisfăcută și se calculează produsele $\alpha_{ij} s_{ij}$ corespunzătoare acestor celule:

$$s_{16} = 36 - 40 = -4; \alpha_{16} = \min \{31, 14\} = 14; \alpha_{16} s_{16} = -56;$$

$$s_{21} = 38 - 58 = -20; \alpha_{21} = \min \{19, 31, 24\} = 19; \alpha_{21} s_{21} = -380;$$

$$s_{22} = 42 - 68 = -26; \alpha_{22} = \min \{19, 31\} = 19; \alpha_{22} s_{22} = -494;$$

$$s_{23} = 44 - 52 = -8; \alpha_{23} = \min \{19, 34\} = 19; \alpha_{23} s_{23} = -152;$$

$$s_{26} = 34 - 44 = -10; \alpha_{26} = \min \{19, 31, 14\} = 14; \alpha_{26} s_{26} = -140.$$

Pentru ca funcția scop să se reducă cu cantitatea maximă posibilă, va trebui să considerăm ciclul ce corespunde celulei în care $\alpha_{ij} s_{ij}$ are valoarea minimă.

Cum:

$$\min_{ij} \alpha_{ij} s_{ij} = \min \{-56, -380, -494, -152, -140\} = -494$$

vom îmbunătăți ciclul ce corespunde celulei a_{22} marcat prin săgeți în tabela 6. Îmbunătățirea acestui ciclu ne conduce la soluția din tabela 8.

Tabela 8

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	a_i
1	68 0	64 12	48 34	24 32	60 0	36 0	78
2	38 0	42 19	44 0	28 0	32 68	34 0	87
3	36 24	46 17	52 0	50 0	40 0	22 14	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

$$f_1 = 8096$$

După primul pas, $f_1 = f_0 + \alpha_{22}s_{22} = 8590 - 494 = 8096$.

Continuînd verificarea optimalității, se constată că soluția obținută după primul pas nu este optimă. Așa cum rezultă din tabela 9, evaluarea celulei a_{16} este negativă: $s_{16} = c_{16} - c_{16} = 36 - 40 = -4$.

Tabela 9

$u_i \backslash v_j$	54	64	48	24	54	40
0	68 54	64 64	48 48	24 24	60 54	36 40
-22	38 32	42 42	44 26	28 2	32 32	34 18
-18	36 36	46 46	52 30	50 6	40 36	22 22

Îmbunătățind ciclul ce corespunde celulei a_{16} , marcat prin săgeți în tabela 8, se obține soluția din tabela 10.

$$s_{16} = -4; \alpha_{16} = \min\{12, 14\} = 12, \alpha_{16}s_{16} = -48.$$

Tabela 10

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	a_i
1	68 0	64 0	48 34	24 32	60 0	36 12	78
2	38 0	42 19	44 0	28 0	32 68	34 0	87
3	36 24	46 29	52 0	50 0	40 0	22 2	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

După pasul doi, funcția scop devine:

$$f_2 = f_1 + \alpha_{16}s_{16} = 8096 - 48 = 8048.$$

Verificînd din nou optimalitatea soluției (tabela 11), se constată că:

Tabela 11

$v_j \backslash u_i$	50	60	48	24	50	36
0	68 50	64 60	48 48	24 24	60 50	36 36
-18	38 32	42 42	44 30	28 6	32 32	34 18
-14	36 36	46 46	52 34	50 10	40 36	22 22

$c_{ij} > \bar{c}_{ij}$, pentru toate celulele în care $x_{ij} = 0$,

$c_{ij} = \bar{c}_{ij}$, pentru toate celulele în care $x_{ij} > 0$.

Soluția din tabela 10, este deci *optimă* (minimă), *unică* și *nedegenerată* (conține exact $m + n - 1 = 3 + 6 - 1 = 8$ valori $x_{ij} > 0$).

Observații. Pornind de la soluția inițială din tabela 6, soluția optimă a fost obținută după doi pași.

În general, soluția optimă se obține după un număr finit k de pași. După fiecare pas valoarea inițială a funcției scop f_0 va lua valorile $f_1, f_2, \dots, f_k$, iar în pasul următor $f_{k+1} = f_k$.

Șirul de valori $f_0, f_1, f_2, \dots, f_k$, va fi strict descrescător:

$$f_0 > f_1 > f_2 > \dots > f_k,$$

$\min f = f_k$, iar valorile x_{ij}^k corespunzătoare, reprezintă soluția optimă (minimă).

Dacă se cere maximul funcției scop, procedeul este analog.

După r pași se va obține un șir de valori strict crescător:

$$f_0 < f_1 < f_2 < \dots < f_r.$$

Dacă în pasul următor, $f_{r+1} = f_r$, atunci $\max f = f_r$.

Valorile x_{ij}^r corespunzătoare, reprezintă soluția optimă (maximă).

Condițiile ca programul de transport să admită o soluție maximă unică sînt:

$$c_{ij} < \bar{c}_{ij}, \text{ pentru celulele în care } x_{ij} = 0, \quad (21)$$

$$c_{ij} = \bar{c}_{ij}, \text{ pentru celulele în care } x_{ij} > 0. \quad (22)$$

Dacă (21) și (22) sînt satisfăcute, dar avem și $c_{ij} = \bar{c}_{ij}$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$, programul admite o infinitate de soluții de maxim, care conduc la aceeași valoare maximă a funcției scop.

Dacă avem și $c_{ij} > \bar{c}_{ij}$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$; soluția nu este maximă, ea poate fi îmbunătățită (funcția scop se poate majora).

Exemplu. Se cere o soluție optimă (maximă) pentru programul de transport din tabela 2, pornind de la soluția inițială de bază din tabela 3. Folosind metoda distributivă modificată se obține după 4 pași soluția din tabela 12.

Tabela 12

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	a_i
1	68 24	64 0	48 0	24 0	60 54	36 0	78
2	38 0	42 48	44 25	28 0	32 0	34 14	87
3	36 0	46 0	52 9	50 32	40 14	22 0	55
b_j	24	48	34	32	68	14	220

$$f = 68 \cdot 24 + 60 \cdot 54 + \dots + 50 \cdot 32 + 40 \cdot 14 = 11\,092.$$

Verificind optimalitatea soluției (tabela 13), se constată că relațiile (21) și (22) sînt satisfăcute, dar avem și $c_{25} = \bar{c}_{25}$ pentru celula a_{25} în care $x_{25} = 0$. Problema admite deci o infinitate de soluții de maxim. Pentru a obține mulțimea acestor soluții, să urmărim ciclul ce corespunde celulei a_{25} (marcat prin săgeți în tabela 12).

Tabela 13

$u_i \backslash v_j$	67	70	72	70	60	62
0	68 68	64 70	48 72	24 70	60 60	36 62
-28	38 40	42 42	44 44	28 42	32 32	34 34
-20	36 48	46 50	52 52	50 50	40 40	22 42

Se obține $\alpha = \min \{25, 14\} = 14$. Soluțiile ce corespund acestui ciclu vor fi:

$$x_{25} = \alpha; x_{23} = 25 - \alpha; x_{33} = 9 + \alpha; x_{35} = 14 - \alpha; \alpha \in [0, 14]; \quad (23)$$

celelalte valori $x_{ij} > 0$ ce aparțin soluției maxime rămîn neschimbate:

$$x_{11} = 24; x_{15} = 54; x_{22} = 48; x_{34} = 32; x_{36} = 14. \quad (24)$$

Mulțimea soluțiilor obținute în (23) și (24) conduc la aceeași valoare maximă a funcției scop: $\max f = 11\,092$.

Dacă soluția unei probleme nu are sens decât în numere întregi (de exemplu x_{ij} reprezintă numărul de transporturi, numărul de piese ce urmează a fi prelucrate pe diferite tipuri de mașini-unelte, numărul de vagoane ce urmează a fi expediate etc.) atunci ea va admite un număr finit de soluții distincte.

Cum în exemplul dat $\alpha \in [0, 14]$, problema nu va admite decât 15 soluții distincte, care se vor obține din (23), pentru $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots, 14\}$. Faptul că o problemă de transport admite o infinitate de soluții (sau un număr finit în numere întregi), prezintă o importanță deosebită în practică, deoarece în astfel de cazuri vom putea alege soluția care convine înăi bine situației locale, în momentul executării planului de transport.

§ 6. Probleme de transport neechilibrate

Dacă relația :

$$\sum_1^m a_i = \sum_1^n b_j = S$$

este satisfăcută, problema de transport se numește echilibrată, în caz contrar se numește neechilibrată. În problemele cu caracter aplicativ distingem următoarele cazuri :

. § 6.1. *Suma cantităților disponibile este mai mare decât suma cantităților necesare :*

$$\sum_1^m a_i < \sum_1^n b_j \quad (27)$$

Pentru ca problema să se poată rezolva ea trebuie să fie echilibrată. În acest scop se introduce un centru de consum fictiv B_{n+1} , căruia îi vom trimite cantitatea :

$$b_{n+1} = \sum_1^m a_i - \sum_1^n b_j > 0. \quad (28)$$

Centrul de consum B_{n+1} fiind fictiv, cantitatea b_{n+1} va trebui să rămână în centrele de expediție A_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Pentru ca această condiție să fie satisfăcută se consideră toate distanțele de transport de la A_i la B_{n+1} egale cu zero :

$$d_{1,n+1} = d_{2,n+1} = \dots = d_{m,n+1} = 0.$$

Se obține astfel un model echilibrat, deoarece în baza relației (28) avem satisfăcută condiția :

$$\sum_1^m a_i = \sum_1^{n+1} b_j = S.$$

Soluția optimă a acestui model ne va permite să determinăm atât cantitățile ce vor fi transportate din A_i în B_j , cât și cantitățile ce vor rămâne disponibile în A_i .

Exemplu. Din 4 stații de cale ferată A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) se trimit lemne de foc în 6 localități, B_j ($j = 1, 2, \dots, 6$).

Distanțele d_{ij} (în km) de la stația A_i la localitatea B_j , cantitățile de lemne a_i (în tone) disponibile în stațiile A_i , precum și cantitățile b_j , necesare localităților B_j , sînt date în tabela 21.

Tabela 21

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	140	150	200	100	160	240	46
A_2	160	100	140	150	120	220	50
A_3	200	120	240	140	130	100	48
A_4	80	180	170	120	200	160	30
b_j	24	30	18	40	16	32	174 160

Se cere să se organizeze un plan de transport care să se realizeze cu un minim de tone km.

Soluție. Deoarece modelul este neechilibrat:

$$\sum_{i=1}^4 a_i > \sum_{j=1}^6 b_j,$$

vom introduce localitatea fictivă B_7 , căreia îi vom repartiza diferența:

$$b_7 = \sum_{i=1}^4 a_i - \sum_{j=1}^6 b_j = 174 - 160 = 14,$$

și vom considera:

$$d_{17} = d_{27} = d_{37} = d_{47} = 0.$$

Se obține astfel modelul echilibrat din tabela 22, în care avem satisfăcută condiția:

$$\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^7 b_j = 174.$$

Tabela 22

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	a_i
1	140	150	200	100	160	240	0	46
2	160	100	140	150	120	220	0	50
3	200	120	240	140	130	100	0	48
4	80	180	170	120	200	160	0	30
b_j	24	30	18	40	16	32	14	174

Folosind metoda elementului minim pe coloană, se obține soluția inițială de bază din tabela 23:

Tabela 23

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	a_i
1	140 0	150 0	200 0	100 40	160 0	240 0	0 6	46
2	160 0	100 30	140 18	150 0	120 2	220 0	0 0	50
3	200 0	120 0	240 0	140 0	130 14	100 32	0 2	48
4	80 24	180 0	170 0	120 0	200 0	160 0	0 6	30
b	24	30	18	40	16	32	14	174

Verificând optimalitatea acestei soluții prin metoda distributivă modificată, se constată că ea este minimă, unică și nedegenerată (conține exact $m + n - 1 = 4 + 7 - 1 = 10$ valori $x_{ij} > 0$).

Soluția optimă ne arată că planul de transport se va realiza cu un $\min f = 16\,700$ tone km, iar în stațiile A_1 , A_3 și A_4 , vor rămâne disponibile cantitățile: 6, 2, respectiv 6 tone lemne (coloana 7, tabela 23).

§.6.2. Suma cantităților disponibile este mai mică decât suma cantităților necesare:

$$\sum_1^m a_i < \sum_1^n b_j. \quad (29)$$

Pentru a obține o problemă de transport echilibrată se introduce un centru de expediție fictiv A_{m+1} , care va expedia centrelor de consum B_j , cantitatea:

$$a_{m+1} = \sum_1^n b_j - \sum_1^m a_i > 0. \quad (30)$$

Întrucât această cantitate nu poate fi transportată, deoarece ea nu există, vom considera distanțele de transport de la A_{m+1} la B_j ($j = 1, 2, \dots, n$) egale cu zero:

$$d_{m+1,1} = d_{m+1,2} = \dots = d_{m+1,n} = 0.$$

Se obține astfel un model de transport echilibrat, deoarece vom avea satisfăcută condiția:

$$\sum_1^{m+1} a_i = \sum_1^n b_j = S.$$

Necesarul centrelor de consum nu va putea fi satisfăcut în întregime. Soluția optimă ne va arăta care sînt cantitățile x_{ij} ce vor trebui trimise din A_i în B_j ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) cît și cantitățile $x_{m+1,j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) ce mai sînt necesare centrelor de consum B_j , pentru a fi satisfăcute conform planului inițial propus.

Evident că în astfel de condiții, o parte din centrele B_j vor trebui să primească cantitatea a_{m+1} de la alte centre de producție.

Exemplu. Amenajarea unui teren plan. În scopul realizării unui teren plan necesar unui șantier de construcții, urmează a se întocmi un plan optim de repartitie a pământului scos din profilurile de săpătură (debleuri) pentru a fi trimis în punctele unde există profiluri de umplutură (rambleuri).

Cantitățile de pământ d_i (în tone) ce urmează a fi obținute din profilurile de săpătură, cele necesare profilurilor de umplutură r_j , precum și distanțele d_{ij} (în sute metri) de la D_i la R_j sînt date în tabela 24.

Tabela 24

$D_i \backslash R_j$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	d_i
D_1	12	16	13	15	20	22	62
D_2	14	10	16	22	25	14	50
D_3	24	26	15	28	30	18	32
D_4	15	20	19	24	18	15	66
r_j	28	36	42	48	30	50	210 234

Se cere să se determine un plan de repartitie a pământului care să conducă la un minim de tone km.

Soluție. Se constată că modelul de transport este neechilibrat, deoarece:

$$\sum_1^4 d_i < \sum_1^6 r_j.$$

Vom introduce deci un profil de săpătură fictiv, D_5 , din care vom transporta în R_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) o cantitate de pământ egală cu:

$$d_5 = \sum_1^6 r_j - \sum_1^4 d_i = 234 - 210 = 24.$$

Cum această cantitate de pământ nu există pe suprafața terenului care trebuie amenajat, vom lua:

$$d_{51} = d_{52} = d_{53} = d_{54} = d_{55} = d_{56} = 0.$$

Se obține astfel modelul echilibrat din tabela 25, în care avem satisfăcută condiția:

$$\sum_1^5 d_i = \sum_1^6 r_j = 234.$$

Tabela 25

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	d_i
1	12	16	13	15	20	22	62
2	14	10	16	22	25	14	50
3	24	26	15	28	30	18	32
4	15	20	19	24	18	15	66
5	0	0	0	0	0	0	24
r_j	28	36	42	48	30	50	234

Folosind metoda distributivă modificată se obține soluția optimă (minimă) din tabela 26.

Tabela 26

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	d_i
1	4	0	10	48	0	0	62
2	0	36	0	0	0	14	50
3	0	0	32	0	0	0	32
4	24	0	0	0	6	36	66
5	0	0	0	0	24	0	24
r_j	28	36	42	48	30	50	234

Verificînd optimalitatea soluției (tabela 27) se constată că avem și evaluări $s_{ij} = 0$, pentru unele celule în care $x_{ij} = 0$.

Tabela 27

$u_i \backslash v_j$	12	8	13	15	15	12
0	0	8	0	0	5	10
2	0	0	1	5	8	0
2	10	16	0	11	13	4
3	0	9	3	6	0	0
-15	3	7	2	0	0	3

Astfel: $s_{21} = s_{54} = 0$; în celulele în care $x_{21} = x_{54} = 0$.

Problema admite deci o dublă infinitate de soluții, câte o infinitate de soluții pentru fiecare din valorile x_{ij} ce compun cele două cicluri ce corespund celulelor a_{21} și a_{54} (marcate prin săgeți în tabela 26).

Dacă vom presupune că x_{ij} reprezintă numărul de transporturi auto de la D_i la R_j , problema nu poate admite decât soluții în numere întregi. Pentru ciclul ce corespunde celulei a_{54} , aceste soluții sînt¹:

$$x_{54} = \alpha; x_{14} = 48 - \alpha; x_{11} = 4 + \alpha; x_{41} = 24 - \alpha;$$

$$x_{45} = 6 + \alpha; x_{55} = 24 - \alpha; \alpha \in \{0, 1, 2, \dots, 24\}.$$

Vom avea numai 25 soluții în numere întregi. Se constată că în R_6 vor fi trimise numai 6 tone de pămînt în loc de 30 cît era nevoie. Diferența de 24 tone va fi adusă din punctul cel mai apropiat de R_6 , situat în afara terenului ce trebuie amenajat.

În aceste condițiuni $\min f = 294\,200$ tone metri.

Concluzie. Problema admite o dublă infinitate de soluții (sau un număr finit în numere întregi), care conduc la aceeași valoare minimă a funcției scop: $\min f = 294,2$ tone km.

Probleme propuse

1. Trei fabrici de zahăr trimit produsul lor în 6 localități. Cantitățile a_i (în tone) disponibile la cele 3 fabrici A_i , cantitățile b_j necesare celor 6 localități B_j , precum și costul transportului c_{ij} (lei/tonă) pe distanța $A_i B_j$, sînt date în tabela de mai jos:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a
A_1	120	50	90	200	40	70	400
A_2	100	220	260	50	110	200	600
A_3	160	180	100	240	280	60	800
b_j	350	150	250	280	320	450	1800

Se cere să se determine cantitățile x_{ij} (tone), care trebuie trimise de la cele 3 fabrici la cele 6 localități, astfel încît planul de transport să se realizeze cu un minim de cheltuieli.

R: Problema admite o infinitate de soluții optime (minime):

$$x_{24} = 280; x_{32} = \alpha; x_{12} = 150 - \alpha; x_{15} = 250 + \alpha; x_{33} = 250;$$

$$x_{25} = 70 - \alpha; x_{21} = 250 + \alpha; x_{31} = 100 - \alpha; x_{36} = 450;$$

unde $\alpha \in [0, 70]$; celelalte valori x_{ij} fiind egale cu zero.

Toate aceste soluții conduc la aceeași valoare minimă a funcției scop: $\min f = 132\,200$ lei.

¹ Pentru ciclul a_{21} se obțin numai 15 soluții în numere întregi: $x_{21} = \beta; x_{41} = 24 - \beta; x_{46} = 36 + \beta; x_{26} = 14 - \beta; \beta \in \{0, 1, 2, \dots, 14\}$.

2. Din 4 centre de cale ferată A_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) se trimit vagoane goale în 3 stații B_j , ($j = 1, 2, 3$).

Numărul vagoanelor goale (a_i) disponibile în centrele A_i , al celor necesare (b_j), în stațiile B_j , precum și costul c_{ij} al transportului unui vagon din A_i în B_j (exprimat în lei/vagon) sînt date în tabela de mai jos.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	13	10	5	250
A_2	8	10	12	750
A_3	23	7	12	500
A_4	20	15	10	250
b_j	100	750	900	1750

Se cere să se determine numărul (x_{ij}) de vagoane goale care trebuie trimise din centrele A_i în stațiile B_j , astfel încît totalul cheltuielilor de transport să fie minim.

R: Se obține soluția unică și nedegenerată:

$$x_{13} = 250; \quad x_{21} = 100; \quad x_{22} = 250; \quad x_{23} = 400; \quad x_{32} = 500; \quad x_{43} = 250;$$

celelalte valori x_{ij} fiind nule; $\min f = 15\,350$ lei.

3. Să se determine un plan de transport care să se realizeze cu un total minim de tone · km, folosind datele din tabela de mai jos:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	28	42	75	36	33	605
A_2	24	36	28	72	54	245
A_3	14	27	35	40	45	650
b_j	220	440	410	230	150	1500 1450

în care a_i reprezintă cantitățile de marfă (tone) disponibile la cele 3 depozite A_i , ($i = 1, 2, 3$); b_j , cantitățile de marfă necesare celor 5 centre de consum B_j , ($j = 1, 2, \dots, 5$). Numerele scrise în chenar reprezintă distanțele (în km) de la depozitul A_i la centrul B_j .

R: Se va introduce un centru de consum fictiv B_6 , unde vom trimite diferența $b_6 = 1\,500 - 1\,450 = 50$ tone. Soluția optimă (minimă) este: $x_{11} = 175$; $x_{14} = 230$; $x_{15} = 150$; $x_{16} = 50$; $x_{23} = 245$; $x_{31} = 45$; $x_{32} = 440$; $x_{33} = 165$; celelalte valori x_{ij} fiind nule. În depozitul A_1 va rămîne un disponibil de 50 tone ($x_{16} = 50$). $\min f = 43\,275$ tone · km.

4. Folosind datele din problema 3, să se determine un plan de transport astfel încît:

— Centrul B_3 să primească cantitatea de 410 t numai de la depozitele A_1 și A_2 .

- Centrul B_4 să primească cantitatea de 230 t numai de la depozitele A_1, A_2, A_3 .
- Diferența $b_3 = 50$ t să rămână disponibilă în depozitul A_3 .

Indicație. Restricțiile impuse vor fi satisfăcute dacă vom pune:

$$d_{33} = d_{14} = d_{16} = d_{26} = N = 1\,000.$$

Se va obține modelul obișnuit al unei probleme de transport:

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	a_i
1	28	42	75	N	33	N	605
2	24	36	28	72	54	N	245
3	14	27	N	40	45	0	650
b_j	220	440	410	230	150	50	1500

Rutele ce corespund celulelor pentru care $d_{ij} = N$ nu vor fi utilizate deoarece distanțele pe aceste rute sînt foarte mari în raport cu cele existente.

Se obține soluția:

$$x_{11} = 220; \quad x_{12} = 70; \quad x_{13} = 165; \quad x_{15} = 150; \quad x_{23} = 245; \quad x_{32} = 370;$$

$$x_{34} = 230; \quad x_{36} = 50; \quad \text{celelalte valori } x_{ij} \text{ fiind nule.}$$

$\min f = 52\,475$ tone·km și reprezintă o majorare de 9 200 tone·km față de soluția obținută în problema 3, cînd toate rutele puteau fi utilizate.

5. Se dă problema de transport din tabela de mai jos:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	16	15	10	21	21	21	25
A_2	23	21	17	14	27	22	26
A_3	26	26	19	26	16	24	30
A_4	20	22	16	24	27	19	28
b_j	20	19	19	16	17	19	109

în care: a_i reprezintă numărul de autocamioane disponibile la autobuzele A_i ($i = 1, 2, 3, 4$); b_j , numărul de autocamioane necesare centrelor B_j ($j = 1, 2, \dots, 6$), numerele scrise în chenar, reprezintă timpul t_{ij} (exprimat în ore), necesar unui autocamion pentru a parcurge distanța de la A_i la B_j .

Se cere să se determine un plan de transport care să se realizeze:

- cu un total minim de moto-ore;
- cu un total maxim de moto-ore.

Indicație. Se va folosi metoda distributivă modificată.

Se obțin o infinitate de soluții optime (minime):

$$x_{11} = 11 - \alpha; x_{12} = 8; x_{13} = 6 + \alpha; x_{21} = 10; x_{24} = 16; x_{33} = 13 - \alpha;$$

$$x_{35} = 17; x_{36} = \alpha; x_{41} = 9 + \alpha; x_{46} = 19 - \alpha; \alpha \in [0, 11].$$

$$\min f = 1850 \text{ moto-ore.}$$

Folosind același procedeu se obțin o infinitate de soluții optime (maxime):

$$x_{14} = 16; x_{16} = 9; x_{21} = 8 - \alpha; x_{23} = 8 + \alpha; x_{26} = 10; x_{31} = 12 + \alpha;$$

$$x_{32} = 18 - \alpha; x_{42} = \alpha; x_{43} = 11 - \alpha; x_{45} = 17; \alpha \in [0, 8].$$

$$\max f = 2435 \text{ moto-ore.}$$

6. Fie a_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) capacitatea de prelucrare a mașinii M_i , exprimată prin numărul de piese prelucrate pe zi; b_j , ($j = 1, 2, \dots, 8$) capacitatea planificată pentru piesele de tipul P_j , exprimată prin numărul de piese ce urmează a fi prelucrate la cele 4 mașini în unitatea de timp (pe zi); c_{ij} , cheltuielile de producție pentru prelucrarea unei piese de tipul j , la mașina-unealtă i .

Folosind datele din tabela de mai jos, se cere să se determine numărul (x_{ij}) de piese de tipul j ce urmează a fi prelucrate la mașina i , astfel încât totalul cheltuielilor pentru realizarea planului de producție să fie minim.

Problemele de acest fel, cunoscute sub numele de „repartiția optimă a pieselor pe mașini-unealte”, conduc la un model obișnuit al unei probleme de transport.

$M_i \backslash P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	a_i
M_1	1,5	2	2,4	0,8	0	0,5	1,1	3	62
M_2	0	2,2	1	1,6	0,9	2	2,5	1	40
M_3	1,2	2,8	0	1,9	3,5	0	1,3	2	51
M_4	1,4	1,1	3,2	0	2,6	1,7	2,5	1,8	47
b_j	12	20	18	24	10	35	8	40	200 / 167

Indicații. Se constată că unele piese nu necesită prelucrarea la toate mașinile. Pentru ca acestor mașini să nu li se repartizeze nici o piesă din cele care nu cer nici o prelucrare la ele, vom considera costurile c_{ij} corespunzătoare foarte mari în raport cu cele existente.

Vom lua: $c_{15} = c_{21} = c_{33} = c_{36} = c_{44} = N = 100$.

Problema fiind neechilibrată, vom introduce o categorie de piese, fictivă, de tipul P_9 , care va conține: $b_9 = 200 - 167 = 33$ piese, și vom considera costurile c_{ij} corespunzătoare egale cu zero; $c_{19} = c_{29} = c_{39} = c_{49} = 0$. Folosind metoda distributivă modificată se obține soluția

optimă (minimă), unică și nedegenerată din tabela de mai jos, din care rezultă $\min f = 172,50$.

$M_i \backslash P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	a_i
M_1				24		35	3			62
M_2			18		10			12		40
M_3	12						5	1	33	51
M_4		20						27		47
b_j	12	20	18	24	10	35	8	40	33	200

Planul de producție se va realiza cu un total minim de 172,50 lei/zi, iar mașina M_3 va lucra sub capacitatea sa maximă (va prelucra 33 piese mai puțin).

CAPITOLUL XI

GRAFURI

Definiții. Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o mulțime finită de puncte pe care le unim după un anumit criteriu.

În acest mod se va obține o corespondență dintre elementele mulțimii X . Legea care stabilește această corespondență o vom nota cu Γ . Prin legea Γ fiecărui element al mulțimii X îi corespunde unul, nici unul sau mai multe elemente ale aceleiași mulțimi.

Graful se poate defini ca o aplicație multivocă a unei mulțimi pe ea însăși.

Un graf G este definit dacă se cunoaște mulțimea vîrfurilor X și legea Γ de corespondență dintre aceste vîrfuri. Vom nota $G = (X, \Gamma)$.

Segmentele orientate care unesc între ele două vîrfuri se numesc *arce*. Dacă notăm cu U mulțimea arcelor dintr-un graf, atunci vom nota $G = (X, U)$. Dacă mulțimea X are n elemente, graful G este de ordinul n și va conține n vîrfuri.

Un graf poate fi definit deci ca un sistem format dintr-o mulțime X de elemente x_i , numite vîrfurile grafului și de o mulțime U de perechi ordonate (x_i, x_j) , numite arcele grafului.

Prin grafuri pot fi reprezentate și studiate o serie de probleme din cele mai diferite domenii de activitate: organizarea circulației într-un oraș; o rețea de comunicații în care vîrfurile reprezintă localitățile, posturi telefonice, posturi de radio emisie și recepție; circulația informațiilor într-un sistem; operațiile de montare sau demontare a unui ansamblu tehnologic; rețeaua stațiilor releu de televiziune; relațiile de rudenie ale unui grup de indivizi (arbore genealogic); fluxul tehnologic al unei întreprinderi etc.

Principalele concepte folosite în teoria grafurilor sînt:

§ 1. Concepte legate de orientare

Drum. O succesiune de arce adiacente care permit trecerea de la un vîrf la altul de-a lungul arcelor. În graful din figura 159 arcele (x_1, x_5) , (x_5, x_4) , (x_4, x_3) formează un drum care unește vîrfurile x_1 cu x_3 . Un drum se poate descrie și prin vîrfurile care le conține, exemplu (x_1, x_5, x_4, x_3) .

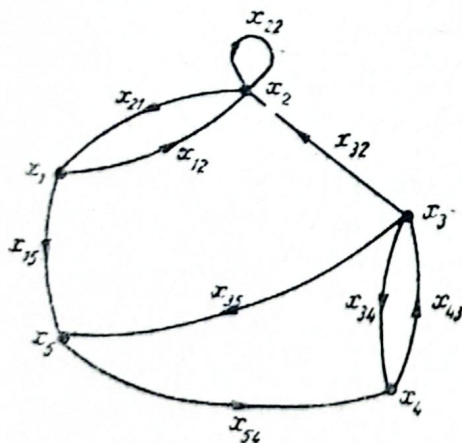


Fig. 159.

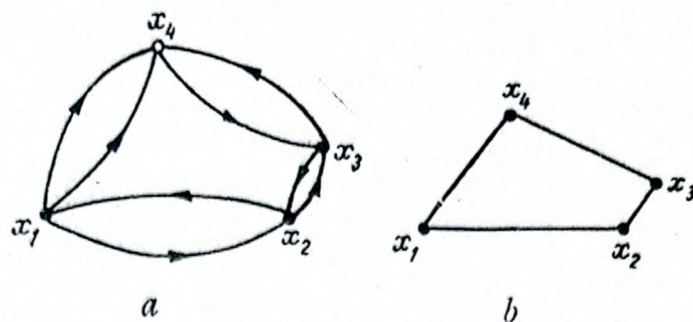


Fig. 160.

Circuit. Un drum în care vârful inițial coincide cu vârful final. În figura 159, arcele (x_5, x_4) , (x_4, x_3) , (x_3, x_5) formează un circuit, care se poate nota prin vîrfurile lui (x_5, x_4, x_3, x_5) .

Lungimea unui drum (sau a unui circuit) este dat de numărul arcelor ce compun acel drum (sau circuit).

Drumul (x_1, x_5, x_4, x_3) din figura 159 are lungimea 3, iar circuitul $(x_1, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ are lungimea 5 (este format din 5 arce).

Bucă. Un circuit de lungime 1. Exemplu, bucla (x_2, x_2) din figura 159.

Graf simetric. Un graf $G = (X, U)$ este simetric dacă:

$$\forall x_i, x_j \in X; (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U.$$

Cu alte cuvinte, dacă x_i este legat de x_j și x_j trebuie să fie legat de x_i , pentru toate vîrfurile între care există o corespondență. Exemplu, graful din figura 160a este simetric. În multe cazuri, pentru simplificare, arcele simetrice se înlocuiesc prin linii fără săgeți (graful din figura 160b).

Graf antisimetric. Un graf $G = (X, U)$ este antisimetric dacă:

$$\forall x_i, x_j \in X; (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \notin U.$$

Cu alte cuvinte, între orice pereche de vîrfuri nu poate exista decît un singur arc. Rezultă că un graf antisimetric nu poate conține bucle. Exemplu, graful din figura 161a.

Graf tare conex. Un graf în care:

$$\forall x_i, x_j \in X; x_i \neq x_j$$

există cel puțin un drum de la vârful x_i la vârful x_j .

Graful din figura 160b este tare conex, dar graful din figura 161b nu, deoarece x_1 nu se poate lega cu x_2 și nici cu x_4 .

§ 2. Concepte legate de neorientare

Muchie. O muchie într-un graf este formată dintr-o pereche de vîrfuri (x_i, x_j) , astfel încît dacă $(x_i, x_j) \in U$, atunci și (sau) $(x_j, x_i) \in U$; unde $x_i \neq x_j$. Cu alte cuvinte, o muchie este o pereche de vîrfuri legate printr-un arc într-un sens sau altul, sau prin două arce de sensuri opuse.

O muchie se notează, de obicei, prin $\bar{u} = [x_i, x_j]$, iar mulțimea tuturor muchiilor, prin $\bar{U}$. Graful din figura 160a are 8 arce, dar numai 4 muchii, iar cel din figura 161a are 9 arce și 9 muchii.

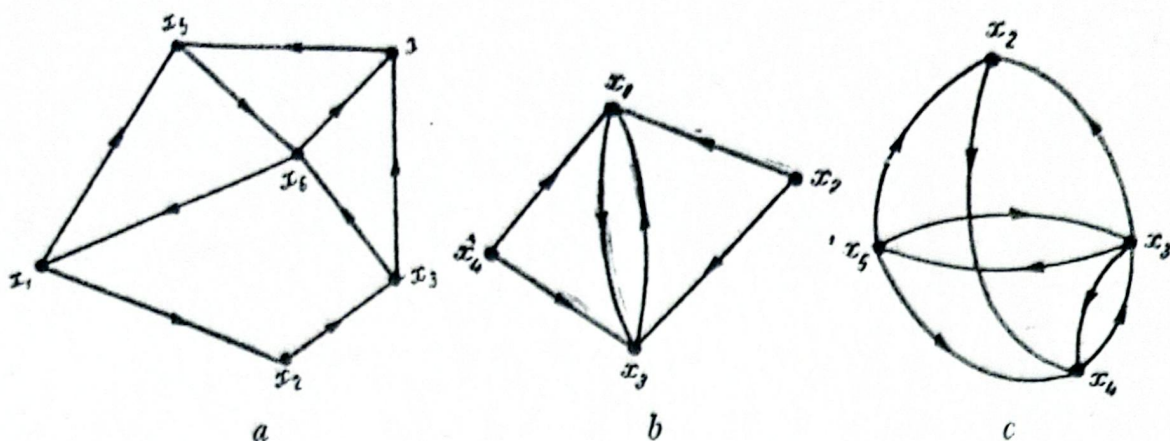


Fig. 161.

Lanț. O succesiune de muchii $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_i)$, astfel încât fiecare muchie $\bar{u}_p$ este legată de precedenta $\bar{u}_{p-1}$ printr-o extremitate și de $\bar{u}_{p+1}$ prin cealaltă extremitate ($p = 2, \dots, i-1$).

Un lanț se notează prin vîrfurile ce le conține. Lanțul este simplu dacă muchiile ce-l compun sînt diferite și este compus în caz contrar. În graful din figura 159 $[x_1, x_2, x_3]$, $[x_1, x_5, x_4, x_3]$ sînt lanțuri simple, iar $[x_5, x_3, x_2, x_1, x_5, x_3, x_2]$ este un lanț compus.

Un lanț se numește elementar dacă nu întîlnește de două ori un același vîrf. În graful din figura 161 b $[x_1, x_2, x_3]$ este un lanț elementar.

Ciclu. Un lanț care pleacă dintr-un vîrf x_i și ajunge în același vîrf se numește ciclu. În graful din figura 159, $[x_5, x_4, x_3, x_5]$, $[x_2, x_1, x_5, x_3, x_4, x_3, x_2]$ sînt cicluri.

Un ciclu este elementar dacă fiecare vîrf ce aparține ciclului este întîlnit o singură dată, cu excepția vîrfului inițial care coincide cu vîrful final. În graful din figura 161b, $[x_1, x_2, x_3, x_1]$ este un ciclu elementar.

Graf conex. Dacă $\forall x_i$ și $\forall x_j$; $x_i \neq x_j$, există un lanț care unește pe x_i cu x_j . Un graf este deci conex dacă există un lanț între două vîrfuri distincte, oricare ar fi ele.

Graful din figura 161a este conex, dar nu este tare conex. Un graf tare conex este și conex. Reciprocă nu este însă adevărată.

§ 3. Tipuri de grafuri

Graf complet. Într-un graf complet, oricare două vîrfuri x_i, x_j sînt legate prin arce fie într-un sens (de la x_i la x_j) fie în sens invers (de la x_j la x_i), fie în ambele sensuri:

$$\forall x_i, x_j \in X \text{ cu } i \neq j; (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U.$$

Exemplu, graful din figura 161c este complet.

Graf parțial. Un graf parțial al unui graf dat $G = (X, U)$ este un graf $G_1 = (X, U_1)$ cu $U_1 \in U$. Exemplu, graful din figura 162 este un graf parțial al grafului din figura 161c obținut prin suprimarea arcelor $[x_1, x_3]$, $[x_1, x_4]$, $[x_3, x_4]$.

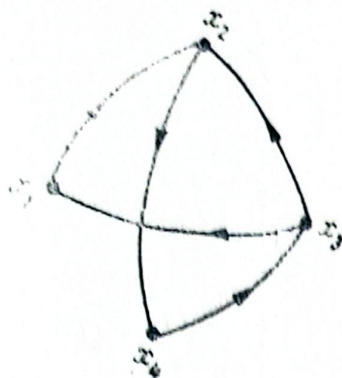


Fig. 162.

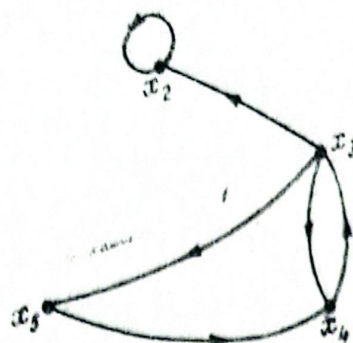


Fig. 163.

Subgraf. Dacă într-un graf G se suprimă unul sau mai multe vîrfuri, precum și arcele care le sînt adiacente se obține un subgraf G' . Un subgraf al lui $G = (X, \Gamma)$ este prin definiție un graf (A, Γ_A) în care:

$$A \subset X \text{ și } \forall x_i \in A, \quad \Gamma_A x_i = \Gamma x_i \cap A.$$

În figura 163 se poate vedea un subgraf al grafului din figura 159 în care a fost suprimat vîrfurile x_1 și arcele adiacente (x_1, x_3) , (x_1, x_2) , (x_2, x_1) .

Graf simplu. Dacă mulțimea X a vîrfurilor unui graf se compune din două mulțimi disjuncte X_1 și X_2 ($X = X_1 \cup X_2$; $X_1 \cap X_2 = \emptyset$), graful $G = (X, \Gamma)$ se numește graf simplu dacă:

$$(x_i, x_j) \in \Gamma \Rightarrow x_i \in X_1; x_j \in X_2.$$

Un graf simplu se poate vedea în figura 164 în care:

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}; X_2 = \{x_5, x_6, x_7\}.$$

Graf total. Un graf $G = (X, \Gamma)$ este total dacă $\forall x_i, x_j \in X$ există un drum de la x_i spre x_j și (sau) de la x_j la x_i .

Un graf tare conex este un graf total. Graful din figura 161a este un graf total. Diferența dintre un graf tare conex și un graf total este urmă-

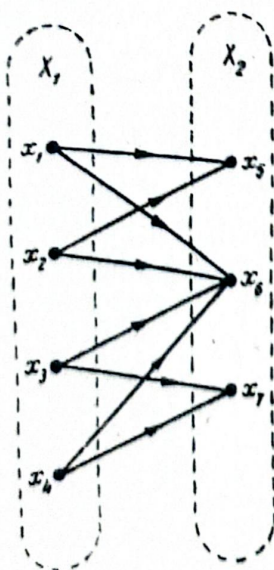


Fig. 164.

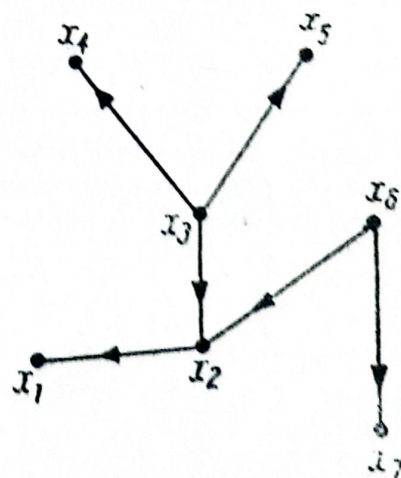


Fig. 165.

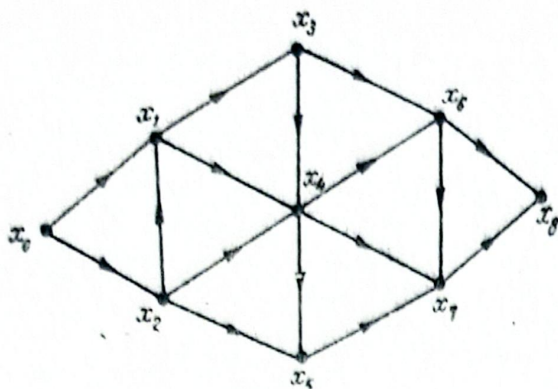


Fig. 166.

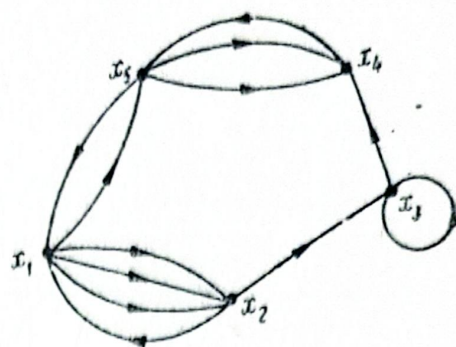


Fig. 167.

toarea: în graful tare conex $\forall x_i, x_j \in X$ există un drum de la x_i la x_j , în graful total $\forall x_i, x_j \in X$ există un drum de la x_i la x_j și (sau) de la x_j la x_i .

Arbore. Un graf conex care nu conține nici un ciclu se numește arbore. Un arbore este un arbore parțial al unui graf dat, dacă el constituie un graf parțial care nu are nici un ciclu. Din definiție rezultă că arborii nu sînt legați de conceptul de orientare.

Într-un arbore orice pereche de vîrfuri este legată printr-un singur lanț și numai unul. Vîrfurile în care există o singură muchie incidentă se numesc vîrfuri terminale.

În figura 165 se poate vedea un graf care conține 4 vîrfuri terminale: x_1, x_4, x_5, x_7 .

Multigraf. Un graf în care cel puțin două vîrfuri sînt legate prin mai multe muchii distincte între ele se numește multigraf. Dacă p este cel mai mare număr de muchii care leagă între ele două vîrfuri, multigraful se numește p -graf.

În figura 167 se poate vedea un 4-graf; vîrfurile x_1 și x_2 sînt legate prin 4 muchii.

Matricea asociată unui graf. Unui graf de ordinul n , i se poate asocia o matrice pătrată (a_{ij}) de ordinul n definită astfel:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (x_i, x_j) \in U \\ 0, & \text{dacă } (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

Această matrice definește complet graful și deoarece elementele ei $a_{ij} \in \{0, 1\}$, poartă numele de *matrice booleană*. Exemplu. Matricea asociată grafului din figura 159 este:

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

§ 4. Drumul cel mai scurt într-un graf

Fie x_i și x_j două vîrfuri ale unui graf $G = (X, \Gamma)$. Numim *depărtarea* de la x_i la x_j și o notăm $d(x_i, x_j)$, numărul de arce ale unui drum de lungime minimă de la x_i la x_j (prin lungime se înțelege numărul de arce care formează drumul).

Drumul cel mai scurt dintre două vîrfuri corespunde depărtării dintre acele două vîrfuri.

Pentru a obține *depărtarea* dintre două vîrfuri se poate folosi următorul algoritm care se bazează pe principiul: „un drum de lungime minimă nu poate fi format decît din drumuri parțiale de lungime minimă”. Se atribuie fiecărui vîrf x_i începînd cu originea drumului un număr egal cu depărtarea de la acel vîrf la origine (x_0). Marcarea se face succesiv pînă la vîrfurile care reprezintă extremitatea finală (z) a drumului.

Dacă numărul atribuit acestei extremități este r , atunci $d(x_0, z) = r$. Să urmărim determinarea drumului de lungime minimă pe graful din figura 168.

Se dă lui x_0 cota 0, apoi se dă cota 1 tuturor vîrfurilor adiacente spre exterior vîrfului x_0 . Se obțin 3 vîrfuri marcate cu 1. În continuare, se atribuie cota 2 vîrfurilor adiacente spre exterior vîrfurilor marcate cu 1. Se obțin 4 vîrfuri notate cu 2. Apoi se atribuie cota 3 vîrfurilor adiacente spre exterior vîrfurilor notate cu 2. Se obțin 3 vîrfuri notate cu 3. Procedul se repetă pînă cînd vîrfurile devin marcate. Cum în exemplul dat z este marcat cu 5 rezultă că $d(x_0, z) = 5$.

Observații

— Pentru a găsi depărtarea $d(z, x_0)$ dintre vîrfurile z și x_0 se procedează în același mod, cu deosebirea că marcarea începe de la vîrfurile z . În general, $d(x_0, z) \neq d(z, x_0)$.

În exemplul dat $d(z, x_0) = 6$ și poate fi urmărită în figura 169.

— În grafele simetrice $d(x_0, z) = d(z, x_0)$, deoarece în acest caz :

$$(x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U; \quad \forall x_i, x_j \in G.$$

— În unele cazuri problema poate admite două sau mai multe soluții. În exemplul din figura 169 avem două drumuri de lungime minimă :

$$d(z, x_0) = (z, 1, 2, 3', 4', 5', x_0) = 6,$$

marcat prin săgeți groase și :

$$d(z, x_0) = (z, 1, 2, 3'', 4'', 5'', x_0) = 6,$$

în care primele 3 arce coincid, iar ultimele 3 marcate punctat sînt diferite.

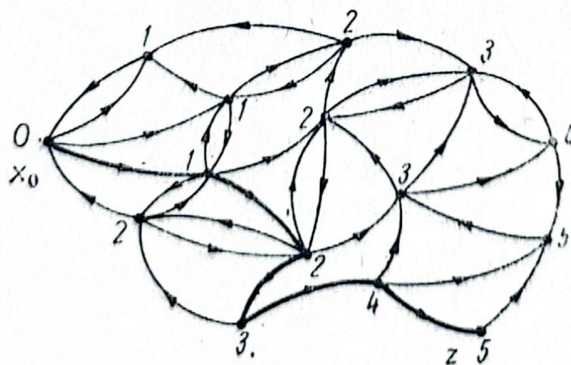


Fig. 168.

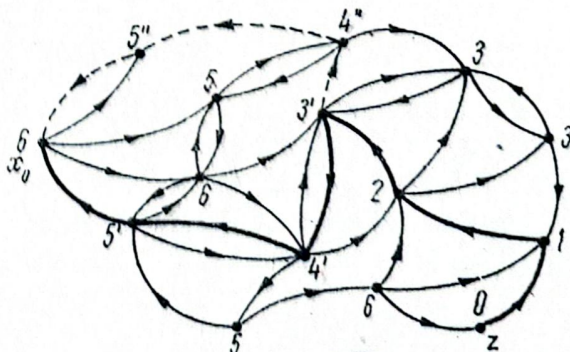


Fig. 169.

§ 5. Drumul de valoare minimă într-un graf

Fie $G = (X, U)$ un graf. Fiecărui arc $u \in U$ îi asociem un număr $l(u) \geq 0$ numit valoarea lui u . Aceste valori pot reprezenta costuri, distanțe, timp, capacități, greutate, productivitate, probabilitate etc., pentru $l(x_i, x_j)$ se poate folosi notația a_{ij} .

Se pune problema de a determina un drum μ ce pleacă de la un vîrf $x_0 \in X$ la un vîrf $x_n \in X$ astfel încît suma :

$$l(\mu) = \sum_{u \in \mu} l(u) \text{ să fie minimă.}$$

Aceasta înseamnă a găsi un drum de *valoare minimă* între două vîrfuri ale unui graf.

Într-o anumită problemă se poate cere să se determine traseul ce trebuie parcurs de un autovehicul care plecînd din x_0 trebuie să ajungă în x_n într-un timp minim. În acest caz valoarea arcului (x_i, x_j) se va nota t_{ij} și va reprezenta timpul de tranzit de la vîrf x_i la vîrf x_j .

Dacă urmărim minimizarea costului de transport se va folosi notația c_{ij} ; costul transportului pe distanța (x_i, x_j) .

În astfel de cazuri, soluția optimă ne va permite să determinăm un drum (sau mai multe), care plecînd din x_0 să ajungă în x_n într-un timp total minim (sau cu un total minim de cheltuieli).

Algoritmul Bellman-Kalaba. Acest algoritm se bazează pe principiul optimalității cunoscut din programarea dinamică: „orice politică optimă nu poate fi formată decît din subpolitici optimale”.

Aplicat la teoria grafelor, acest principiu se enunță astfel. *Orice drum minim este format numai din drumuri parțiale minime.*

Vom folosi notația :

c_{ij} , valoarea asociată arcului (x_i, x_j) ce aparține grafului $G = (X, U)$, definită astfel :

$$c_{ij} = \begin{cases} l(x_i, x_j), & \text{dacă } (x_i, x_j) \in U \\ 0, & \text{dacă } (x_i, x_i) \in U \\ \infty & \text{dacă } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

Cu această notație, găsirea drumului minim

$$\mu = [x_0, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, x_n]$$

revine la determinarea minimului sumei :

$$c_{0i_1} + c_{i_1i_2} + c_{i_2i_3} + \dots + c_{i_k n}. \quad (1)$$

Fie acum v_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), valoarea drumului minim de la vîrf x_i la vîrf final. Dacă vom presupune că graful are $n+1$ vîrfuri, atunci vîrful inițial se notează cu x_0 , iar vîrful final cu x_n .

Pentru a găsi valorile v_i ale drumurilor minime de la vîrf x_i la vîrf x_n ($i = 0, 1, \dots, n-1$), va trebui să rezolvăm sistemul de ecuații :

$$v_i = \min_{j \neq i} (v_j + c_{ij}); \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$v_n = 0.$$

Valorile găsite pentru v_i în diferitele iterații ce urmează a fi efectuate le vom nota cu $v_i^{(0)}, v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(k)}, \dots$

În iterația zero ($k = 0$) se definește:

$$v_i^{(0)} = c_{in} \text{ și } v_n^{(0)} = 0; i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

În prima iterație ($k = 1$), se calculează valorile:

$$v_i^{(1)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(0)} + c_{ij}) \text{ și } v_n^{(1)} = 0; i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Procedeeul se repetă în mod analog și în iterațiile următoare, pînă cînd se ajunge la iterația de ordinul k , în care se determină valorile:

$$v_i^{(k)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(k-1)} + c_{ij}) \text{ și } v_n^{(k)} = 0; i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Iterațiile se opresc atunci cînd, pentru toți $k = 0, 1, \dots$

$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}; i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Numărul $v_i^{(k)}$ reprezintă valoarea drumului minim între vîrfurile x_i și x_n ale grafului considerat.

Se poate arăta că într-un graf cu $n + 1$ vîrfuri, sînt necesare cel mult $n - 1$ iterații pentru a găsi valoarea drumului minim ($k \leq n - 1$). Rezultatele obținute se trec într-un tabel de forma:

$v_i^{(r)}$	$v_0^{(r)}$	$v_1^{(r)}$	...	$v_{n-1}^{(r)}$
0	$v_0^{(0)}$	$v_1^{(0)}$	...	$v_{n-1}^{(0)}$
1	$v_0^{(1)}$	$v_1^{(1)}$	...	$v_{n-1}^{(1)}$
...	...	...	...	...
k	$v_0^{(k)}$	$v_1^{(k)}$	...	$v_{n-1}^{(k)}$

Pentru exemplificare ne propunem să aplicăm acest algoritm în graful din figura 170. Numerele c_{ij} scrise pe arcele grafului reprezintă costul transportului din x_i în x_j . Se scrie matricea costurilor:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_0	0	14	10	12	∞	∞	∞	∞	∞
x_1	∞	0	∞	8	8	∞	∞	∞	∞
x_2	7	5	0	4	12	2	15	∞	∞
x_3	5	∞	∞	0	∞	10	∞	∞	∞
$(c_{ij}) = x_4$	∞	∞	∞	∞	0	6	15	4	∞
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	12	∞
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	9	20
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	6	0	16
x_8	∞	∞	12	∞	∞	∞	∞	∞	0

În iterația zero ($k = 0$) se scriu valorile:

$$v_i^{(0)} = c_{i8}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, 8$$

care se iau direct din ultima coloană a matricei (c_{ij}) .

$$v_0^{(0)} = v_1^{(0)} = v_2^{(0)} = v_3^{(0)} = v_4^{(0)} = v_5^{(0)} = \infty; v_6^{(0)} = 20; v_7^{(0)} = 16; v_8^{(0)} = 0.$$

În prima iterație ($k = 1$) se determină valorile:

$$v_i^{(1)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(0)} + c_{ij}); \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$j = 0, 1, \dots, n.$$

Se obține succesiv:

$$i = 0; j \neq 0; v_0^{(1)} = \min (v_1^{(0)} + c_{01}, v_2^{(0)} + c_{02}, \dots, v_8^{(0)} + c_{08}) =$$

$$= \min (\infty + 14, \infty + 10, \infty + 12, \infty + \infty, \infty + \infty, 20 + \infty, 16 + \infty, 0 + \infty) = \infty$$

(s-a convenit ca, dacă în sumele considerate nu figurează sume finite de forma $a_1 + a_2$, $\min (\dots, a + \infty, \dots)$ să fie egal cu ∞).

$$i = 1; j \neq 1; v_1^{(1)} = \min (v_0^{(0)} + c_{10}, v_2^{(0)} + c_{12}, \dots, v_8^{(0)} + c_{18}) = \min (\infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 8, \infty + 8, \infty + \infty, 20 + \infty, 16 + \infty, 0 + \infty) = \infty.$$

$$i = 2; j \neq 2; v_2^{(1)} = \min (v_0^{(0)} + c_{20}, v_1^{(0)} + c_{21}, v_3^{(0)} + c_{23}, \dots, v_8^{(0)} + c_{28}) =$$

$$= \min (\infty + 7, 5 + \infty, \infty + 4, 12 + \infty, \infty + 2, 20 + 15, 16 + \infty, 0 + \infty) = 35.$$

$$i = 7; j \neq 7; v_7^{(1)} = \min (v_0^{(0)} + c_{70}, v_1^{(0)} + c_{71}, \dots, v_6^{(0)} + c_{76}, v_8^{(0)} + c_{78}) = \min (\infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, 0 + 20, 0 + 16) = 16.$$

$$i = 8; j \neq 8; v_8^{(1)} = 0.$$

Se procedează la fel și pentru celelalte iterații, făcând $k = 2, 3, \dots$. Valorile $v_i^{(k)}$ astfel obținute au fost trecute în tabela:

$k \backslash v_i^{(k)}$	$v_0^{(k)}$	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_4^{(k)}$	$v_5^{(k)}$	$v_6^{(k)}$	$v_7^{(k)}$	$v_8^{(k)}$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	20	16	0
1	∞	∞	35	∞	20	28	20	16	0
2	45	28	30	38	20	28	20	16	0
3	40	28	30	38	20	28	20	16	0
4	40	28	30	38	20	28	20	16	0

Se constată că ultimile două linii sînt egale:

$$v_i^{(3)} = v_i^{(4)}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, 8.$$

Aceasta înseamnă că în iterația 4 se repetă rezultatele din iterația 3, și deci $v_0^{(3)} = v_0^{(4)} = 40$ reprezintă valoarea minimă a drumului dintre vîrfurile x_0 și x_8 .

Pentru a stabili drumul optim, se pleacă din vîrfurile x_0 . Vîrfurile imediat următor al drumului minim este acel vîrf x_i pentru care

avem satisfăcută relația: $c_{0i} = v_i = v_0$. Pentru $i = 2$, avem: $c_{02} + v_2 = v_0 \Rightarrow 10 + 30 = 40$, deci după vîrfurile x_0 urmează x_2 .

După x_2 urmează acel vîrf pentru care $c_{2i} + v_i = v_2$.

Acest vîrf este x_5 deoarece $c_{25} + v_5 = v_2 \Rightarrow 2 + 28 = 30$.

În mod analog se obțin și vîrfurile x_7 și x_8 .

Costul minim se va realiza pe traseul $\mu(x_0, x_2, x_5, x_7, x_8)$, marcat în figura 170 printr-o linie groasă și va fi $l(\mu) = 40$.

Observații. Graful din figura 170 nefiind simetric, valoarea minimă a drumurilor de la x_8 la x_0 va fi diferită de valoarea minimă a drumurilor de la x_0 la x_8 .

Într-adevăr, se constată că valoarea minimă a drumului de la x_8 la x_0 este $l(\mu) = 19$ și se realizează pe traseul $\mu = (x_8, x_2, x_0)$, marcat prin arce punctate în graful din figura 170.

Aplicarea logaritmului Bellman-Kalaba se reduce la următoarele operații cu matrice.

Se observă mai întîi că valorile $v_i^{(0)}$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) sînt egale cu elementele ultimei coloane ale matricei (c_{ij}) .

Acestei matrice i se atașează o matrice de extensie ale cărei elemente se obțin astfel:

Se adună elementele liniilor matricei (c_{ij}) la elementele ultimei sale coloane (exceptînd adunarea elementelor situate pe diagonală). Din sumele astfel obținute, se rețin sumele minime care se înscriu în prima coloană a matricei de extensie. Se constată ușor că elementele acestei coloane sînt egale cu valorile $v_i^{(1)}$ determinate în prima iterație ($k = 1$).

Procedeul se repetă adunînd liniile matricei (c_{ij}) la elementele coloanei I a matricei de extensie și se rețin sumele minime. Aceste sume reprezintă coloana II a matricei de extensie și sînt egale cu valorile $v_i^{(2)}$ obținute în iterația a doua ($k = 2$).

Procedeul se continuă pînă cînd în matricea de extensie se obțin două coloane identice consecutive.

Primul element al ultimei (sau penultimei) coloane din matricea de extensie reprezintă valoarea drumului minim. Numărul coloanelor matricei de extensie este egal cu numărul iterațiilor necesare pentru obținerea drumului minim.

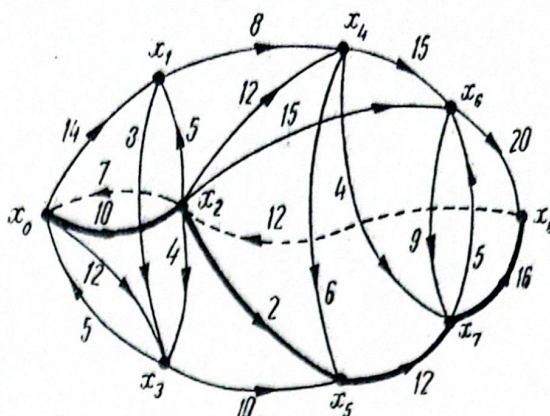


Fig. 170.

Folosind datele din exemplul precedent se obține următoarea matrice de extensie :

	I	II	III	IV	X
x_0		45	40	40	x_2
x_1		28	28	28	x_4
x_2	35	30	30	30	x_5
x_3		38	38	38	x_6
x_4	20	20	20	20	x_7
x_5	28	28	28	28	x_7
x_6	20	20	20	20	x_8
x_7	16	16	16	16	x_8
x_8	0	0	0	0	x_8

Cum coloanele III și IV sînt identice, rezultă :

$$\min l(\mu_0) = 40; \quad \mu_0 = (x_0, x_2, x_5, x_7, x_8).$$

Drumul minim se obține astfel :

Se pornește de la elementul minim din ultima coloană (sau penultima coloană), care este 16. Acest element precizează drumul de la ultimul vîrf la penultimul, adică (x_7, x_8) . Se scrie x_8 pe linia x_7 în coloana X.

În general se va trece pe linia i în coloana X acel vîrf x_j , pentru care :

$$v_i^{(k)} = v_j^{(k-1)} + c_{ij}.$$

În acest mod se obține o succesiune de vîrfuri care se vor înscrie în coloana X. Cu ajutorul acestei coloane se poate determina ușor drumul minim de la oricare vîrf la vîrf final.

În acest scop se va urmări secvența vîrfurilor începînd de la vîrfurile corespunzător din coloana X și apoi în continuare, la corespondentul acestuia din linia respectivă în coloana X. În exemplul dat, drumul de valoare minimă de la x_0 la x_8 va fi :

$$\mu_0(x_0, x_2, x_5, x_7, x_8); \quad l(\mu_0) = 40.$$

Într-adevăr, pe linia lui x_0 , în coloana X găsim pe x_2 , pe linia lui x_2 în coloana X găsim pe x_5 , pe linia lui x_5 în coloana X se află x_7 , iar pe linia lui x_7 în coloana X găsim pe x_8 .

În mod analog se obține drumurile de valoare minimă de la :

$$x_1 \text{ la } x_8; \mu_1(x_1, x_4, x_7, x_8); \quad l(\mu_1) = 28;$$

$$x_2 \text{ la } x_8; \mu_2(x_2, x_5, x_7, x_8); \quad l(\mu_2) = 30;$$

$$x_3 \text{ la } x_8; \mu_3(x_3, x_6, x_7, x_8); \quad l(\mu_3) = 38;$$

$$x_4 \text{ la } x_8; \mu_4(x_4, x_7, x_8); \quad l(\mu_4) = 20;$$

$$x_5 \text{ la } x_8; \mu_5(x_5, x_7, x_8); \quad l(\mu_5) = 28;$$

$$x_6 \text{ la } x_8; \mu_6(x_6, x_8); \quad l(\mu_6) = 20;$$

$$x_7 \text{ la } x_8; \mu_7(x_7, x_8); \quad l(\mu_7) = 16.$$

Valorile minime $l(\mu_i)$; ($i = 1, 2, \dots, 7$) se iau direct din coloana IV linia i a matricei de extensie.

Simplitatea algoritmului Bellman-Kalaba (care se reduce la însumarea succesivă a elementelor situate pe liniile și coloanele unei matrice și reținerea sumelor minime), permite programarea lui cu ușurință la mașinile electronice de calcul.

O îmbunătățire a algoritmului Bellman-Kalaba a fost propusă de I. Tomescu în [18].

§ 6. Drumul de valoare maximă într-un graf

În unele probleme se cere să se determine drumul ce trebuie parcurs între două vîrfuri ale unui graf, astfel încît valoarea acestui drum să fie maximă.

În astfel de cazuri numerele c_{ij} pot reprezenta: productivitatea muncii, probabilitatea de realizare a unui fenomen etc.

Algoritmul Bellman-Kalaba se poate aplica și pentru determinarea drumului de valoare maximă, cu condiția ca graful să nu conțină nici bucle, nici circuite, deoarece în astfel de cazuri lungimea unui drum poate să nu fie finită, iar valoarea lui nu este mărginită.

Pentru a obține drumul de valoare maximă se folosesc aceleași relații ca și la determinarea drumului minim, cu deosebire că în matricea asociată grafului se va lua:

$$c_{ij} = -\infty, \text{ dacă } x_{ij} \notin U$$

iar simbolul min se va înlocui cu max.

Se va calcula:

$$v_i^{(k)} = \max_{j \neq i} (v_j^{(k-1)} + c_{ij});$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, n$$

pentru $k = 1, 2, 3, \dots$; și ne oprim atunci cînd:

$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}; i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

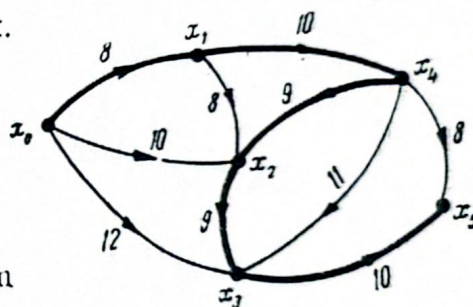


Fig. 171.

Exemplu. Să se determine drumul de valoare maximă între vîrfurile x_0 și x_5 în graful din figura 171. Pornind de la matricea grafului:

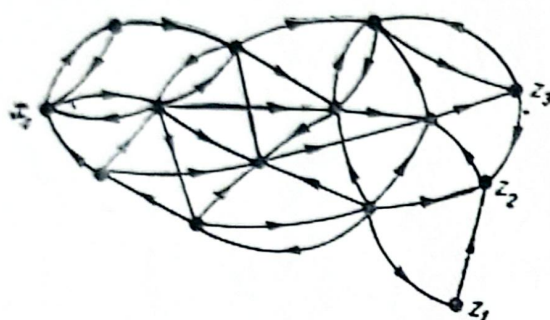
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	0	8	10	12	$-\infty$	$-\infty$
x_1	$-\infty$	0	8	$-\infty$	10	$-\infty$
x_2	$-\infty$	$-\infty$	0	9	$-\infty$	$-\infty$
x_3	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	10
x_4	$-\infty$	$-\infty$	9	11	0	8
x_5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

$= (c_{ij})$

se determină ușor elementele matricei extinse:

	I	II	III	IV	V	X
x_0	22	29	39	46	46	x_1
x_1	18	31	38	38	38	x_4
x_2	19	19	19	19	19	x_3
x_3	10	10	10	10	10	x_5
x_4	21	28	28	28	28	x_2
x_5	0	0	0	0	0	x_5

Se constată că valoarea maximă a drumului de la x_0 la x_5 este 46 (primul element din coloana V a matricei extinse). Drumul maxim de la x_0 la x_5 este:



$$\mu = (x_0, x_1, x_4, x_2, x_3, x_5)$$

trasat prin linii groase în graful din figura 171.

Probleme propuse

1. Să se determine drumul cel mai scurt între vîrfurile x_0, z_1 ; x_0, z_2 și x_0, z_3 în graful din figura 172.

R: Se va găsi $d(x_0, z_1) = d(x_0, z_2) = d(x_0, z_3) = 4$.

2. Se cere drumul de valoare minimă între vîrfurile x_0 , și x_9 și apoi între x_9 și x_0 în graful simetric din figura 173.

R: Se va găsi $l(\mu) = 18$; $\mu = (x_0, x_1, x_4, x_9)$.

3. Să se afle traseul ce trebuie parcurs de un autovehicul care pleacă din vîrfurile x_1 și trebuie să ajungă în x_7 într-un timp total minim, folosind graful din figura 174. Numerele scrise pe arcele grafului reprezintă timpul exprimat în minute pentru a parcurge distanța dintre două vîrfuri consecutive.

Fig. 172.

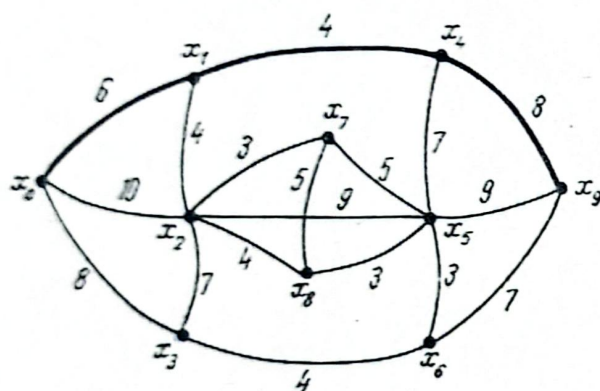


Fig. 173.

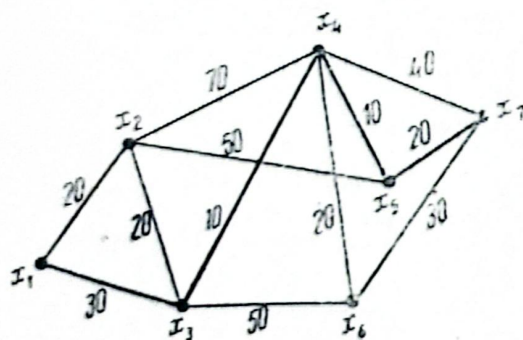


Fig. 174.

R. Pornind de la matricea asociată grafului se va obține matricea extinsă:

	I	II	III	IV	X
x_1		80	70	70	x_3
x_2	70	70	60	60	x_3
x_3	50	40	40	40	x_4
x_4	30	30	30	30	x_5
x_5	20	20	20	20	x_7
x_6	30	30	30	30	x_7
x_7	0	0	0	0	x_7

din care se constată că după 4 iterații se obțin două coloane identice. Dacă autovehiculul va urma traseul $\mu = (x_1, x_3, x_4, x_5, x_7)$ el va ajunge din x_1 în x_7 în timpul minim de 70 minute $l(\mu) = 70$.

4. Să se determine drumul de valoare maximă de la x_0 la x_{11} și apoi de la x_1 la x_{11} , ..., de la x_5 la x_{11} , precum și traseul corespunzător, folosind graful din figura 175.

R. Folosind matricea asociată grafului (c_{ij}) se determină matricea extinsă din care se deduce:

$$\begin{aligned}
 \mu_0 &= (x_0, x_4, x_3, x_2, x_7, x_9, x_{11}); & l(\mu_0) &= 33 \\
 \mu_1 &= (x_1, x_2, x_7, x_9, x_{11}); & l(\mu_1) &= 27 \\
 \mu'_1 &= (x_1, x_3, x_2, x_7, x_9, x_{11}); & l(\mu'_1) &= 27 \\
 \mu_2 &= (x_2, x_7, x_9, x_{11}); & l(\mu_2) &= 18 \\
 \mu_3 &= (x_3, x_2, x_7, x_9, x_{11}); & l(\mu_3) &= 20 \\
 \mu_4 &= (x_4, x_3, x_2, x_7, x_9, x_{11}); & l(\mu_4) &= 29 \\
 \mu_5 &= (x_5, x_6, x_7, x_9, x_{11}); & l(\mu_5) &= 22.
 \end{aligned}$$

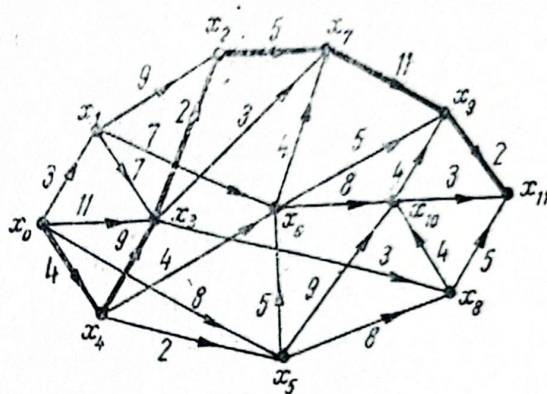


Fig. 175.

	1	2	3	4	5	6	X
x_0	$-\infty$	21	27	31	33	33	x_4
x_1	$-\infty$	18	27	27	27	27	x_2, x_3
x_2	$-\infty$	18	18	18	18	18	x_7
x_3	8	16	20	20	20	20	x_2
x_4	$-\infty$	17	25	29	29	29	x_3
x_5	13	16	22	22	22	22	x_6
x_6	11	17	17	17	17	17	x_7
x_7	13	13	13	13	13	13	x_9
x_8	7	10	10	10	10	10	x_{10}
x_9	2	2	2	2	2	2	x_{11}
x_{10}	6	6	6	6	6	6	x_9
x_{11}	0	0	0	0	0	0	x_{11}

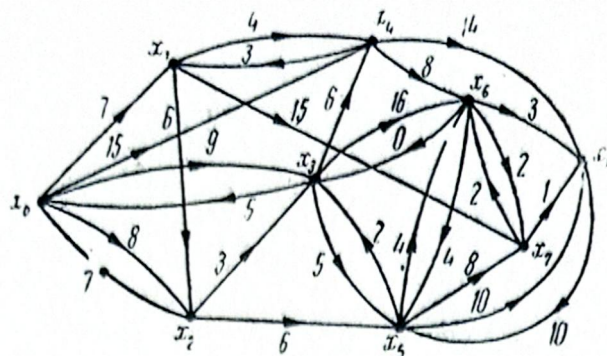


Fig. 176.

5. Folosind graful din figura 176 să se determine :

a. Depărtările, $d(x_0, x_8)$ și $d(x_8, x_0)$.

b. Drumul de valoare minimă între vîrfurile x_0, x_8 și x_8, x_0 .

R. a. $d(x_0, x_8) = 2$; $\mu = (x_0, x_4, x_8)$ și $d(x_8, x_0) = 3$; $\mu = (x_8, x_5, x_3, x_0)$

b. Din matricea asociată grafului se obține matricea extinsă :

	I	II	III	IV	X
x_0	29	23	21	21	x_2, x_3
x_1	16	15	15	15	x_4
x_2	16	13	13	13	x_5
x_3	15	12	12	12	x_5
x_4	11	11	11	11	x_6
x_5	7	7	7	7	x_6
x_6	3	3	3	3	x_7, x_8
x_7	1	1	1	1	x_8
x_8	0	0	0	0	x_8

din care se constată că problema admite 4 soluții :

$$\mu_1 = (x_0, x_2, x_5, x_6, x_8);$$

$$\mu_2 = (x_0, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8);$$

$$\mu_3 = (x_0, x_3, x_5, x_6, x_8);$$

$$\mu_4 = (x_0, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8).$$

$$l(\mu_i) = 21; i = 1, 2, 3, 4.$$

Există un singur drum de valoare minimă de la x_8 la x_0 :

$$\mu = (x_8, x_5, x_3, x_0); l(\mu) = 17.$$

§ 7. Relație de ordine strictă într-un graf

Dacă între vîrfurile x_i și x_j ale unui graf există un drum de la x_i către x_j , se va scrie $x_i < x_j$ și constituie o relație de ordine strictă. O astfel de relație este tranzitivă ($x_i < x_j$ și $x_j < x_k \Rightarrow x_i < x_k$).

În acest caz se spune că vîrfurile x_i precede pe x_j sau că x_i este un ascendent al lui x_j . Vîrfurile x_j care succede lui x_i este un descendent al lui x_i .

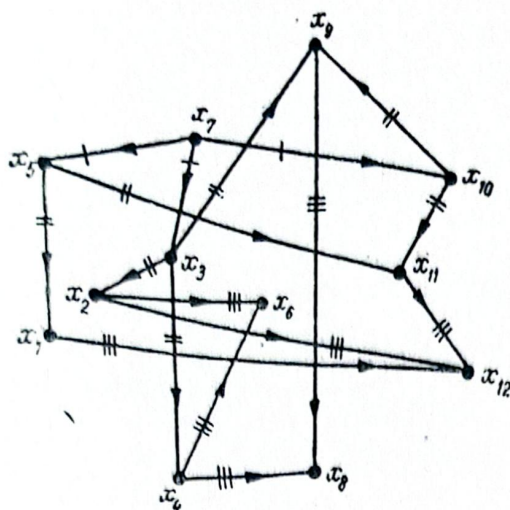


Fig. 177.

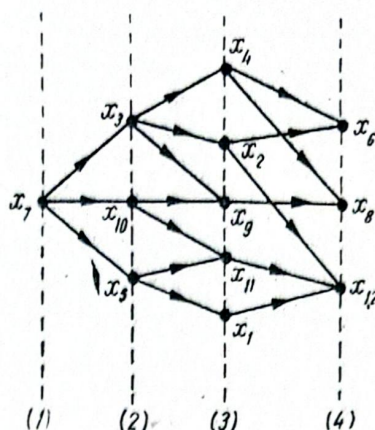


Fig. 178.

Operațiile care se execută într-un proces tehnologic pentru realizarea unui produs se succed într-o anumită ordine cronologică. Vîrfurile grafului care reflectă acest proces sînt într-o relație de ordine strictă. Operația x_i trebuie să aibă loc înaintea unei alte operații x_j .

Condiția ca între vîrfurile unui graf să existe o relație de ordine strictă este ca el să nu conțină nici un circuit. Un exemplu este dat în graful din figura 177.

Vîrfurile grafului pot fi împărțite în submulțimi, numite *nivele* sau *aliniamente*. Fiecare nivel conține numai vîrfuri la care se poate ajunge din vîrfurile *nivelelor anterioare* și din care se poate pleca spre vîrfurile *nivelelor următoare*.

Vîrfurile primului nivel nu au ascendenți.

Vîrfurile ultimului nivel nu au descendenți.

Vîrfurile aceluiași nivel nu pot fi unite între ele.

Graful din figura 178 este ordonat și conține 4 nivele. Se constată ușor că nivelul 1 conține un singur vîrf și nu are ascendenți.

Vîrfurile nivelelor 2 și 3 au ascendenți și descendenți, iar vîrfurile ultimului nivel 4 nu au descendenți.

§ 8. Descompunerea unui graf conex fără circuite în nivele

Introducere. Fiind dat un graf conex fără circuite se pune problema de a împărți vîrfurile lui pe nivele.

Determinarea nivelelor se poate face direct pe graf folosind următorul algoritm:

Se determină vîrfurile care n-au ascendenți; aceste vîrfuri formează primul nivel. Se suprimă apoi aceste vîrfuri împreună cu arcele care pleacă din ele, prin tăierea lor cu o linie.

În graful rămas se procedează la fel suprimînd vîrfurile și arcele incidente spre exterior. Aceste vîrfuri formează nivelul al doilea. Procedeu se continuă pînă la ultimul nivel, care va conține vîrfuri din care nu mai pleacă nici un arc.

Să aplicăm acest algoritm folosind graful din figura 177.

Se constată că vîrfurile x_7 și x_4 este singurul care nu are nici un arc incident spre interior. Primul nivel va cuprinde numai vîrfurile x_7 și x_4 .

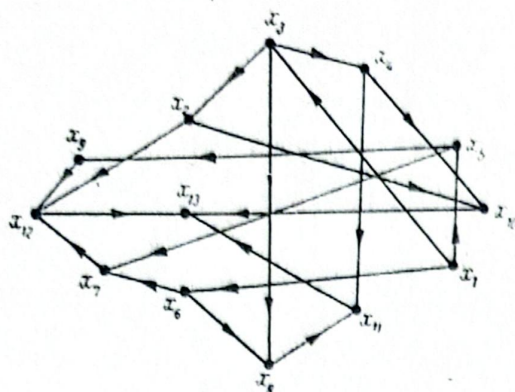


Fig. 179.

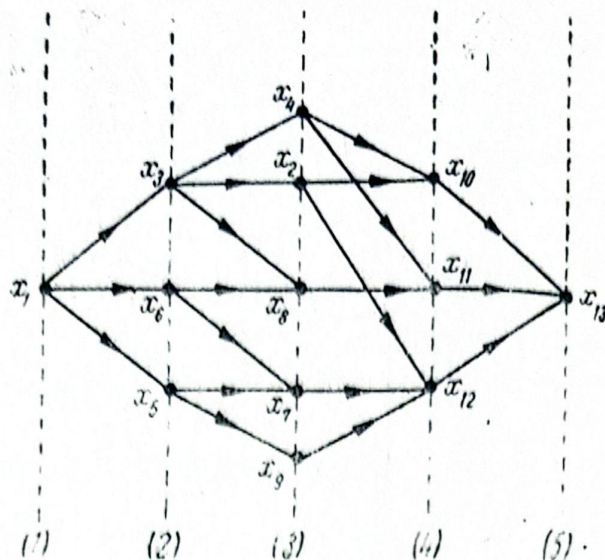


Fig. 180.

Se suprimă vârful x_7 și arcele ce pleacă din el: (x_7, x_5) ; (x_7, x_3) ; (x_7, x_{10}) . În graful rămas, vîrfurile x_3, x_5, x_{10} nu mai au decît arce incidente spre exterior; ele vor forma nivelul 2. Se suprimă aceste vîrfuri împreună cu arcele care pleacă din ele.

Procedînd în mod analog în noul graf, se vor suprima vîrfurile $x_1, x_2, x_4, x_9, x_{11}$ care au numai arce incidente spre exterior; ele vor forma nivelul 3.

Vîrfurile rămase nesuprimate x_6, x_8, x_{12} formează nivelul 4. Se obține graful ordonat pe nivele din figura 178.

Exercițiu. Se dă graful din figura 179. Folosind algoritmul expus, să se ordoneze vîrfurile lui pe nivele. Se va găsi graful din figura 180 care conține 5 nivele.

§ 9. Determinarea drumului de valoare optimă între vîrfurile nivelului inițial și final ale unui graf

Dacă graful este ordonat pe nivele, valoarea optimă între vîrfurile situate pe primul nivel și vîrfurile situate pe ultimul nivel se poate obține ușor fără a folosi algoritmul Bellman-Kalaba. Metoda pe care o vom expune se bazează pe principiul optimalității cunoscut din programarea dinamică și care se enunță astfel: „un drum de valoare minimă (maximă) nu poate fi format decît din drumuri parțiale de valoare minimă (maximă)”.

Fie graful din figura 181. Ne propunem să găsim drumul minim dintre vîrfurile x_0 situate pe nivelul 0 și vîrfurile x_1^1, x_4^2, x_4^3 situate pe nivelul 4.

Se atribuie fiecărui vîrf situat pe nivelul 1 cîte un număr care reprezintă valoarea atașată arcului ce pleacă din x_0 , incidente în vîrfurile nivelului 1.

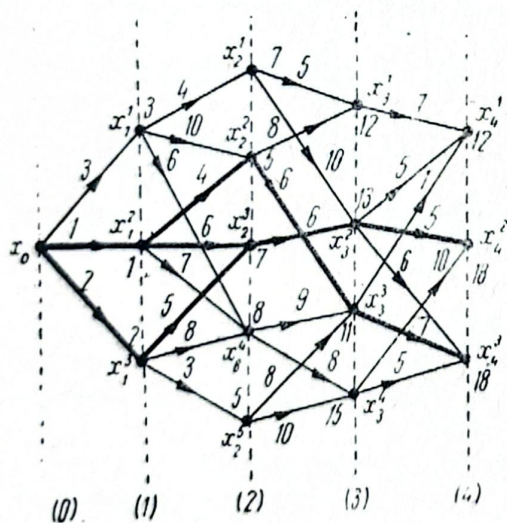


Fig. 181.

Astfel, vîrfurile x_1^1 , x_1^2 , x_1^3 vor fi marcate cu numerele 3, 1, 2. Pentru vîrfurile situate pe nivelul 2, se calculează suma numerelor cu care au fost marcate vîrfurile nivelului 1 cu valorile arcelor incidente în vîrfurile nivelului 2. Cu sumele minime astfel obținute se vor marca vîrfurile nivelului 2. Astfel, în vîrfurile x_2^1 avem un singur arc incident, se va marca cu $7 = 3 + 4$. Vîrfurile x_2^2 se va marca cu $\min(3 + 10, 1 + 4) = 5$; x_2^3 cu $\min(1 + 6, 2 + 5) = 7$; x_2^4 cu $\min(3 + 6, 1 + 7, 2 + 8) = 8$ și x_2^5 cu $5 = 2 + 3$.

Procedeu se continuă în mod analog și cu vîrfurile nivelelor 3 și 4. Numerele cu care au fost marcate vîrfurile ultimului nivel 4, reprezintă valorile minime ale drumurilor de la x_0 la aceste vîrfuri. În exemplul dat, drumurile de valoare minimă de la x_0 la vîrfurile x_4^1 , x_4^2 , x_4^3 situate pe nivelul 4, marcate cu linii groase în graful din figura 181 sînt:

$$\mu(x_0, x_4^1) = (x_0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^1); l_{\min}(x_0, x_4^1) = 12.$$

De la x_0 la x_4^2 avem două drumuri diferite care au aceeași valoare minimă:

$$\mu_1(x_0, x_4^2) = (x_0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2),$$

$$\mu_2(x_0, x_4^2) = (x_0, x_1^3, x_2^3, x_3^2, x_4^2),$$

pentru care $l(\mu_1) = l(\mu_2) = 18$.

$$\mu(x_0, x_4^3) = (x_0, x_1^2, x_2^2, x_3^3, x_4^3); l_{\min}(x_0, x_4^3) = 18.$$

Folosind același procedeu se poate determina și valoarea maximă a drumurilor dintre vîrfurile situate pe nivele diferite.

Dacă nivelul inițial și final conține câte un singur vîrf, graful se numește *rețea de transport*. Vîrfurile inițial x_0 se numește *intrarea rețelei*, iar vîrfurile finale x_n , *ieșirea rețelei*. Dacă numerele scrise pe arcele rețelei reprezintă timpul (sau costul) necesar pentru a parcurge arcul respectiv, soluția minimă ne va arăta traseul ce trebuie parcurs de un mobil de la vîrfurile inițiale x_0 la vîrfurile finale x_n , pentru ca timpul (sau costul) total de parcurs de la x_0 la x_n să fie minim.

Pentru a obține drumul de valoare minimă între vîrfurile x_0 și x_n se atribuie fiecărui vîrf al rețelei pornind din x_0 , câte o valoare care reprezintă minimul sumei valorilor scrise pe arce pînă în acel punct. Numărul cu care a fost marcat vîrfurile finale x_n reprezintă valoarea drumului minim de la x_0 la x_n .

Marcarea vîrfurilor se poate face începînd cu vîrfurile finale x_n pînă cînd se ajunge prin iterații regresive în vîrfurile inițiale x_0 (așa cum se procedează în problemele de programare dinamică).

Probleme propuse

1. În rețeaua de transport din figura 182, numerele scrise pe arce reprezintă timpul (exprimat în ore) pentru a parcurge arcul respectiv. Se cere să se determine itinerariul ce trebuie urmat pentru a ajunge din punctul x_0 în punctul x_8 într-un timp minim.

R. Se va determina drumul de valoare minimă între x_0 și x_8 începînd cu x_0 și terminînd cu x_8 . Se va găsi $t_{\min} = 20$ ore. Itinerariul a fost marcat cu linii groase și săgeți în figura 183.

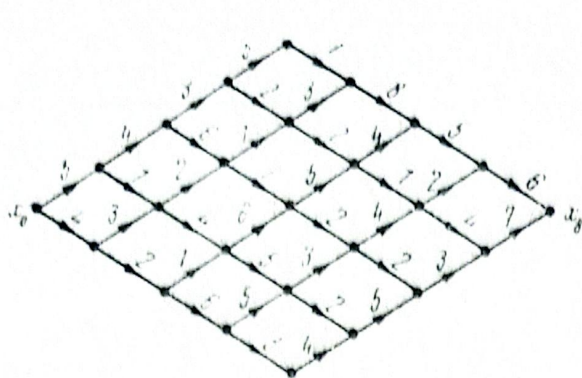


Fig. 182.

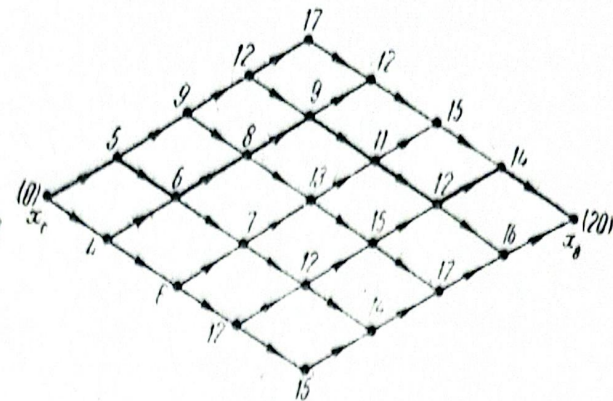


Fig. 183.

2. Folosind aceeași rețea (figura 182) să se determine drumul de valoare maximă, începînd marcarea vîrfurilor în sens invers de la x_8 spre x_0 .

R. Se va găsi $l_{max} = 43$; drumul de valoare maximă a fost marcat cu linii groase și săgeți în figura 184.

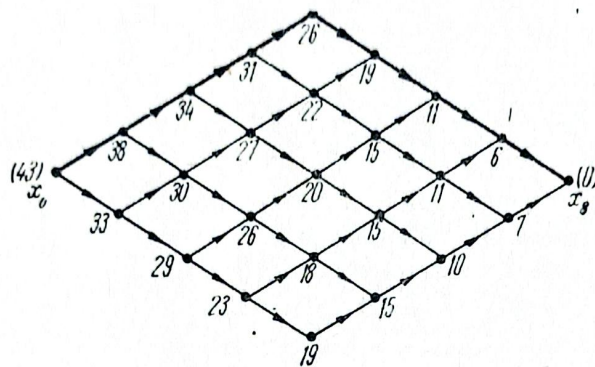


Fig. 184.

3. Un sistem S se găsește în momentul inițial în stare x_0 . În momentele 1, 2, 3 se poate afla în una din stările indicate în graful din figura 185.

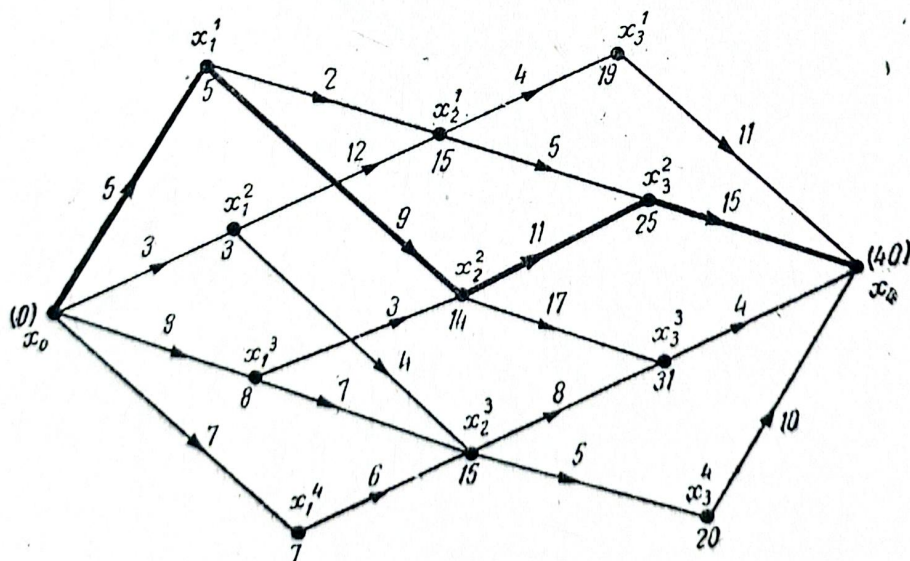


Fig. 185.

§ 1. Rangul unei matrice

Fie $A = (a_{ij})_{mn}$ o matrice cu m linii și n coloane.

Numim rang al matricei A și-l notăm cu p ($p = \text{rang } A$), ordinul cel mai mare p al minorilor diferiți de zero ce se pot forma cu liniile și coloanele matricei A .

Dacă în A suprimăm $m-p$ linii și $n-p$ coloane se obține un tablou cu p linii și p coloane. Determinantul acestui tablou se numește minor de ordinul p al matricei A .

Deoarece prin definiție matricea nulă are rangul zero, putem scrie:

$$0 \leq p \leq \min(m, n).$$

Se știe, de asemenea că rangul unei matrice nu se schimbă dacă efectuăm următoarele *transformări elementare*:

- înmulțim elementele unei linii cu un număr nenul;
- schimbăm două linii între ele;
- adunăm unei linii elementele altei linii, înmulțite cu un factor constant.

Folosind aceste proprietăți, se transformă matricea dată în matrice superior triunghiulară (cu elementele situate sub diagonala principală egale cu zero).

Rangul matricei este egal cu numărul maxim al elementelor nenule, situate pe diagonala principală a matricelor triunghiulare formate.

Cum elementele situate pe diagonala principală se numesc *pivoți*, putem spune că: rangul unei matrice este egal cu numărul maxim al pivoților nenuli din matricele triunghiulare formate.

Transformarea în matrice triunghiulară se face astfel:

Pasul 1. Prima linie rămâne neschimbată. Din linia i înmulțită cu $a_{11} \neq 0$, se scade prima linie înmulțită cu

$$a_{i1}; \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

În urma acestei operații, elementele din prima coloană devin nule în afară de a_{11} .

Un element oarecare $a_{ij}^{(1)}$, situat pe linia i și coloana j după primul pas, va fi dat de formula:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}; \quad \begin{matrix} i = 2, 3, \dots, m; \\ j = 1, 2, \dots, n, \end{matrix}$$

cunoscută și sub numele de *regula dreptunghiului*.

Pasul 2. Se suprimă linia și coloana pivotului și operația se continuă cu matricea rămasă, considerînd pe $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ca pivot. După $(m - 1)$ pași dacă $m < n$, sau după $(n - 1)$ pași dacă $n < m$, matricea A va fi transformată în matrice triunghiulară.

Exemplu. Se cere rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Folosind regula dreptunghiului, după doi pași se obține:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 5 & 8 & 14 \\ 0 & -2 & 10 & 16 & 29 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -16 \\ 0 & -1 & 5 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se constată că matricile triunghiulare formate din coloana 1, una din coloanele 2, 3 sau 4 și coloana 5 conțin câte 3 pivoți nenuli (celelalte conțin numai câte două) deci $\text{rang } A = 3$.

Observații

— În fiecare pas se pot face simplificări pe linii înainte de a trece la pasul următor.

— După fiecare pas, linia și coloana pivotului nu se mai scriu, ne mai fiind necesare în pasul următor.

— Dacă $\min(m, n) = m$ și în pasul $(m - 1)$ primii m pivoți sînt nenuli, calculele nu se mai fac pentru ultimile $(n - m)$ coloane; $\text{rang } A = m$.

Numărul operațiilor elementare se reduce în acest caz cu:

$$\Delta(m, n) = 3m(m - 1)(n - m) : 2.$$

Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -13 & \dots \\ -5 & -33 & \dots \end{pmatrix} \rightarrow (1 \dots).$$

Cum $\min(m, n) = \min(3, 6) = 3$, iar în pasul doi, primii 3 pivoți sînt nenuli (1, -2, 1), elementele situate pe coloanele 4, 5, 6 din pasul 1 și doi nu au mai fost calculate, $\text{rang } A = 3$.

Numărul operațiilor a fost redus cu:

$$\Delta(m, n) = 3 \cdot m \cdot (m - 1)(n - m) : 2 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 : 2 = 27.$$

— Dacă $\min(m, n) = n$, și în pasul $(n - 1)$; primii n pivoți sînt nenuli, elementele situate pe ultimele $(m - n)$ linii nu se mai calculează, $\text{rang } A = n$. În acest caz, numărul operațiilor elementare se va reduce cu:

$$\Delta(n, m) = 3 \cdot n \cdot (n - 1)(m - n) : 2.$$

Exemplu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & -9 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 6 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Se constată că $\min(m, n) = \min(6, 4) = 4$, iar în pasul 3, primii 4 pivoți sînt nenuli (2, 1, -4, -8). Elementele situate pe liniile 5, 6 din pasul 1, 2 și 3 nu au mai fost calculate; rang $A = 4$. În acest caz, numărul operațiilor elementare a fost redus cu:

$$\Delta(n, m) = 3n \cdot (n - 1)(m - n) : 2 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (6 - 4) : 2 = 36.$$

§ 2. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

În literatura de specialitate se cunosc astăzi un număr de peste 25 de metode sau variante pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare. Dintre acestea, metoda Cramer care din păcate încă se mai învață în liceu, împreună cu metoda matriceală sînt cele mai laborioase, necesită numărul maxim de operații elementare (pentru un sistem de 10 ecuații cu 10 necunoscute numărul operațiilor este de ordinul milioanei).

Menționăm cu această ocazie că metodele menționate (Cramer și matriceală) nu se mai programează astăzi la nici una din mașinile electronice de calcul.

a. *Metoda eliminării succesive (sau metoda eliminării parțiale)*, pe care o vom expune este simplă, poate fi ușor programată pe calculatoarele electronice, necesită un număr foarte redus de operații elementare în comparație cu celelalte metode și exclude operațiile cu fracții.

Fie sistemul

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ \dots &\dots \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n &= b_i \\ \dots &\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nj} x_j + \dots + a_{nn} x_n &= b_n, \end{aligned} \quad (1)$$

de n ecuații liniare cu n necunoscute sau, sub forma matriceală:

$$AX = B; \quad A = (a_{ij}),$$

$$X = (x_j); \quad B = (b_i),$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

Folosind metoda eliminării succesive, prima ecuație rămîne neschimbată, din ecuația a doua se elimină x_1 , din ecuația a treia se elimină x_1 și x_2 , ș.a.m.d. din ecuația n se elimină $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

În acest scop se scrie matricea completă $(A|B)$ a sistemului (1) și se transformă într-o matrice superior triunghiulară.

Pasul 1. Se consideră $a_{11} \neq 0$ ca pivot¹. Elementele situate pe linia pivotului rămân neschimbate.

Din linia i înmulțită cu a_{11} se scade prima linie înmulțită cu a_{i1} , ($i = 2, 3, \dots, n$).

În acest mod, elementele din prima coloană devin nule în afară de pivot care rămâne neschimbat ($a_{11} \neq 0$).

Un element oarecare $a_{ij}^{(1)}$ situat pe linia i coloana j , precum și termenul liber corespunzător $b_i^{(1)}$ după primul pas, se vor obține din relațiile:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{11} a_{ij} - a_{i1} a_{1j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}; \quad b_i^{(1)} = a_{11} b_i - a_{i1} b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{i1} & b_i \end{vmatrix},$$

(adică se va folosi *regula dreptunghiului*).

Situația după primul pas este:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right).$$

Pasul 2. Se procedează în mod analog cu matricea obținută în primul pas, suprimând linia și coloana pivotului și considerînd pe $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ca pivot (dacă $a_{22}^{(1)} = 0$, se procedează ca în pasul 1).

După $n - 1$ pași se obține matricea triunghiulară

$$(A|B) \rightarrow \dots \rightarrow (A|B)^{(n-1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right),$$

din care se obține soluția sistemului dat:

$$x_n^0 = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \dots, x_1^0 = \frac{b_1 - a_{1n} x_n^0 - \dots - a_{12} x_2^0}{a_{11}}.$$

Observații

— Linia și coloana pivotului din fiecare pas se pot suprima, nemaifiind necesare în calcule în pașii următori.

— Se pot face simplificări pe linii în fiecare pas înainte de a trece la pasul următor.

Exemplu. Să se rezolve sistemul

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 + & x_2 + & x_3 - & 2x_4 - & 7x_5 = & 0 \\ 2x_1 & & + & x_3 & - & 2x_5 = & 1 \\ 3x_1 + & x_2 & & - & x_4 & = & 20 \\ & 2x_2 - & 5x_3 & & + & x_5 = & 23 \\ x_1 - & x_2 & & + & 3x_4 & = & -14. \end{array}$$

¹ Dacă $a_{11} = 0$, se face o schimbare de linii aducînd în prima linie un element $a_{i1} \neq 0$, $i = 2, 3, \dots, n$.

Se scrie matricea completă a sistemului și după 4 pași se obține :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & 23 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 14 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 4 & 12 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 5 & 21 & 20 & 20 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 23 & 23 \\ -2 & -1 & 5 & 7 & 14 & 14 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -9 & -19 \\ 6 & -4 & -13 & -24 \\ 0 & -1 & 5 & 15 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 14 & 33 \\ -1 & 5 & 15 \end{array} \right) \rightarrow (9|18).$$

În pasul 2 și 3 elementele matricei complete au fost simplificate pe fiecare linie cu 2.

Se obține soluția :

$$x_5 = 18 : 9 = 2; x_4 = (33 - 28) : (-1) = -5; x_3 = (-19 + 18 - 5) : 2 = -3,$$

$$x_2 = (1 - 24 + 20 - 3) : (-2) = 3; x_1 = 14 - 10 + 3 - 3 = 4.$$

$$x_1 = 4; x_2 = 3; x_3 = -3; x_4 = -5; x_5 = 2.$$

Pentru a ne da seama de eficiența acestei metode simple, cititorul va putea rezolva sistemul dat prin metoda lui Cramer (care necesită calculul a 6 determinanți de ordinul 5), prin metoda matriceală $AX = B$; $X = A^{-1} \cdot B$ (care necesită calculul unei matrice inverse de ordinul 5) sau prin metoda eliminării totale (Gauss—Jordan), care este mult mai laborioasă (necesită un volum de calcule de două ori mai mare față de metoda eliminării parțiale) și în plus necesită operații cu fracții.

Menționăm cu această ocazie un fapt care trebuie scos în evidență și anume că, tocmai aceste metode : Cramer, matriceală, Gauss—Jordan, sînt studiate și expuse în manualele școlare.

b. Discuția sistemelor liniare neomogene.

Pentru a cunoaște natura unui sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute, vom folosi teorema¹ Kronecker—Capelli.

Dacă notăm $p = \text{rang } A$, $q = \text{rang } (A|B)$, atunci sistemul

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

este compatibil, dacă și numai dacă $p = q$.

Această teoremă simplă a cărei demonstrație se poate face fără calcule cu determinanți are două avantaje :

- ne permite să știm dacă sistemul este compatibil ;
- în caz afirmativ, pe aceeași schemă se poate determina soluția, sau soluțiile sistemului.

Putem avea următoarele situații :

$p = q = n$; sistemul este compatibil determinat (admite soluție unică) ;

$p = q < n$; sistemul este compatibil nedeterminat (admite ∞^{n-p} soluții).

Dacă $n - p = 1, 2, \dots, r$, vom spune că avem o infinitate simplă, dublă, ..., multiplă de ordinul r de soluții.

$p < q$; sistemul este incompatibil (nu admite soluții).

¹ Teorema lui Rouché care se mai află încă în toate manualele de liceu este atât de laborioasă încît nu mai este folosită. Ocupă locul cuvenit în muzeul de istorie a matematicii.

Exemple

$$\begin{aligned} 1^\circ. (m = n) \quad & x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ & 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ & x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{aligned}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -2 & 2 \\ -7 & -5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow (1|2).$$

Discuție. Cum $p = q = n = 3$, sistemul este compatibil determinat ($p = q = n$; $m = n$).

Soluție. Începând cu ultimul pas și terminând cu primul, se deduce succesiv:

$$x_3 = 2 : 1 = 2; \quad x_2 = (2 + 4) : (-3) = -2; \quad x_1 = 1 - 6 + 8 = 3;$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 2.$$

$$\begin{aligned} 2^\circ. (m > n) \quad & x_1 + 2x_2 = 7 \\ & 2x_1 - x_2 = 4 \\ & 3x_1 + x_2 = 11 \\ & x_1 - 2x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -10 & -10 \\ -5 & -10 & -10 \\ -4 & -8 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Discuție. Se constată că $p = q = n = 2$, sistemul este deci compatibil determinat ($p = q = n$; $m > n$).

Soluție. Se obține succesiv: $x_2 = (-10) : (-5) = 2$; $x_1 = 7 - 4 = 3$.

Soluția găsită (3, 2), verifică evident și ultimile două ecuații.

$$\begin{aligned} 3^\circ. (m = n) \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 \end{aligned}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow (0|0),$$

Discuție. $p = q = 2$; $n = 3$. Cum $p = q < n$, iar $n - p = 1$, sistemul este compatibil și admite o infinitate simplă de soluții ($\infty^{n-p} = \infty^1$); $p = q < n$, $m = n$.

Soluție. Se consideră $x_3 = \alpha$ necunoscută secundară, apoi se obține succesiv: $x_2 = 2 : 5$; $x_1 = 4 - \alpha - 4 : 5 = (16 - 5\alpha) : 5$; $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 4^\circ. (m > n) \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
 & 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 14 \\
 & 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 10.
 \end{aligned}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 14 \\ 3 & 1 & 3 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -2 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Discuție. $p = q = 2$; $n = 3$. Cum $p = q < n$, iar $n - p = 1$, sistemul este compatibil nedeterminat și admite o infinitate simplă de soluții ($\infty^{n-p} = \infty^1$); $p = q < n$, $m > n$.

Soluție. Dacă se consideră $x_3 = \alpha$ necunoscută secundară, se obține: $x_2 = 2 - 5\alpha$; $x_1 = (16 - 5\alpha) : 5$; $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
 5^\circ. (m < n); \quad & x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\
 & 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\
 & 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8.
 \end{aligned}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 5 & -5 & -5 & -5 & -5 \end{array} \right) \rightarrow (0 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Discuție. $p = q = 2$; $n = 4$. Cum $p = q < n$ și $n - p = 2$, sistemul este compatibil dublu nedeterminat: ($p = q < n$; $m < n$).

Soluție. Dacă se consideră $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, necunoscute secundare, se obține $x_2 = -1 + \alpha + \beta$; $x_1 = -1 - 2\alpha + 4(-1 + \alpha + \beta)$, $x_1 = 2\alpha + 4\beta - 5$; $x_2 = \alpha + \beta - 1$; $x_3 = \alpha$; $x_4 = \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
 6^\circ. (m = n); \quad & x_1 - x_2 - 3x_3 = 8 \\
 & 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + 19x_3 = 10.
 \end{aligned}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 19 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 10 & -20 & -20 \\ 5 & 25 & -6 & -6 \end{array} \right) \rightarrow (0 \mid 88).$$

Discuție. $p = 2$; $q = 3$; $p < q$; sistemul este incompatibil.

$$\begin{aligned}
 7^\circ. (m > n); \quad & x_1 - x_2 = 8 \\
 & 3x_1 - x_2 = 4 \\
 & 2x_1 + 3x_2 = 10.
 \end{aligned}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -20 & -20 \\ 5 & -6 & -6 \end{array} \right) \rightarrow (0 \mid 88).$$

Discuție. $p = 2$; $q = 3$; $p < q$; sistemul este incompatibil.

$$\begin{aligned} 3^\circ. (m < n); \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6. \end{aligned}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow (0 \ 0 \ | \ 6).$$

Discuție. $p = 2$; $q = 3$; $p < q$, sistemul este incompatibil.

Observație. Putem avea următoarele situații:

1°. Sistemul este compatibil determinat (două cazuri):

$$p = q = n, \text{ iar } m = n, \text{ sau } m > n.$$

2°. Sistemul este compatibil nedeterminat (3 cazuri):

$$p = q < n, \text{ iar } m = n, m > n, \text{ sau } m < n,$$

și poate avea o infinitate simplă, dublă, ..., multiplă de ordinul r de soluții (după cum $n - p = 1, 2, \dots, r$).

3°. Sistemul poate fi incompatibil (3 cazuri):

$$p < q, \text{ iar } m = n, m > n, \text{ sau } m < n.$$

c. *Discuția sistemelor liniare omogene.*

Dacă sistemul liniar este omogen, atunci el este de forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Deoarece $\text{rang } A = \text{rang } (A|0)$, condiția $p = q$ este întotdeauna satisfăcută.

Dacă $p = n$, sistemul este compatibil determinat și admitem numai soluția banală $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Dacă $p < n$, sistemul este compatibil nedeterminat și admite o infinitate, simplă, dublă, ..., multiplă de ordinul r de soluții, nebanale (după cum $n - p = 1, 2, \dots, r$).

Exemple. Să se discute și să se rezolve sistemele omogene:

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ & 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{aligned}$$

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} -3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -5 & -5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc} -6 & -1 \\ 0 & -7 \end{array} \right) \rightarrow (42)$$

Discuție. $p = q = n = 4$. Sistemul este compatibil determinat și admite numai soluția banală $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

$$(A|0) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & -5 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow (0 \ 0).$$

Soluția. Dacă se consideră $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$ necunoscute secundare, se obține: $x_2 = \alpha + \beta$; $x_1 = -2\alpha + 4(\alpha + \beta) = 2\alpha + 4\beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

În cazul în care $p = q$, metoda eliminării parțiale ne permite să găsim și soluția (dacă $p = q = n$) sau soluțiile (dacă $p = q < n$) sistemului, folosind aceeași schemă de calcul, ceea ce constituie un alt mare avantaj al metodei.

În programarea liniară se pune în mod curent problema de a determina valoarea unei funcții liniare de forma :

unde $\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \in \mathbf{R}$ sînt date, iar $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt soluțiile sistemului de n ecuații liniare cu n necunoscute

despre care știm că este unic determinat, *fără a rezolva sistemul* (fără a-i cunoaște soluțiile).

Metoda 1. Se scrie sistemul (3) la care se adaugă (2).
Se obține sistemul:

format din $(n + 1)$ ecuații cu n necunoscute: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Folosind metoda eliminării parțiale paragraful **2**, se ajunge după n pași la o matrice superior triunghiulară de forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & f \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha f + \beta \end{array} \right).$$

Deoarece sistemul dat (3) este unic determinat ($p = q = n$), va trebui ca $\alpha f + \beta = 0$, din care se deduce $f = -\beta : \alpha$.

Exemplu. Se cere valoarea funcției:

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4, \quad (5)$$

în care x_1, x_2, x_3, x_4 sînt soluțiile sistemului:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 6, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned} \quad (6)$$

Soluție. Scriem matricea completă, formată din sistemul (6) la care se adaugă ecuația (5) și o transformăm (după 4 pași) într-o matrice superior triunghiulară:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & f \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & -6 & -25 \\ -5 & 0 & 1 & -8 \\ 1 & -3 & -1 & -9 \\ -3 & 2 & -3 & f-28 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -35 & -85 \\ 16 & 11 & 70 \\ -13 & -3 & -5f+65 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 17 \\ 16 & 11 & 70 \\ 13 & 3 & 5f-65 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} -101 & -202 \\ -88 & 5f-286 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 88 & 286-5f \end{array} \right) \rightarrow (110-5f). \end{aligned}$$

Sistemul (6) va fi unic determinat dacă $p = q = 4$ (are 4 pivoți nenuli: $(1, -5, -5, -101)$, iar $110 - 5f = 0$; $f = 22$).

Observație. Metoda folosită ne permite să rezolvăm sistemul dat și să verificăm exactitatea rezultatului.

Se obține succesiv, începînd cu pasul 3:

$$x_4 = 2; \quad x_3 = 17 - 7 \cdot 2 = 3; \quad x_2 = -9 + 2 + 9 = 2; \quad x_1 = 14 - 4 - 3 - 6 = 1.$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 2, \quad f = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 = 22.$$

Metoda 2. Se consideră sistemul (4) scris sub forma:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + 0 = b_1,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + 0 = b_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n + 0 = b_n,$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n - f = 0,$$

de $(n+1)$ ecuații cu $(n+1)$ necunoscute: $x_1, x_2, \dots, x_n, f$.

Folosind metoda eliminării parțiale, după n pași se obține o matrice triunghiulară de forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & -1 \end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a^{(n)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \dots \\ b_n^{(n-1)} \\ b^{(n)} \end{array} \right)$$

din care se deduce soluția $f = b^{(n)} : a^{(n)}$.

Exemplu. Să se determine α , astfel ca funcția:

$$f = 3x_1 - 4x_2 + \alpha x_3, \quad (7)$$

să aibă valoarea $f = 27$, știind că x_1, x_2, x_3 sînt soluțiile sistemului:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 5. \end{aligned} \quad (8)$$

Soluție. Scriem matricea completă a sistemului format din (8) și (7), pe care o transformăm după 3 pași într-o matrice triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & \alpha & -f & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ -7 & -5 & 0 & 0 & 4 \\ -16 & \alpha-9 & -f & -3 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ -3\alpha-5 & 3f & 41 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow (3f | 6\alpha + 51).$$

Din condițiile $3f = 6\alpha + 51$ și $f = 27$, se obține $\alpha = (3f - 51) : 6 = 5$.

Observație. Ca și prin metoda 1, soluția sistemului dat se obține ușor, putînd face verificarea rezultatului obținut.

Soluția este: $x_3 = 2$; $x_2 = (2 + 2.2) : (-3) = -2$; $x_1 = 1 - 3.2 - (-4)(-2) = 3$.

Cum $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$ și $\alpha = 5$, relația (7) devine:

$$f = 3.3 - 4.(-2) + 5.2 = 27 \quad (\text{c.c.t.v}).$$

§ 4. Calculul matricei inverse

Fie $A = (a_{ij})_{nn}$ o matrice pătrată nesingulară (rangul matricei este egal cu n , rang $A = n$).

Se cunosc astăzi multe metode pentru a calcula matricea inversă A^{-1} . Vom expune două din cele mai simple.

a. Transformarea în matrice unitate.

Dacă notăm cu I matricea unitate de ordinul n , se obține succesiv:

$$(A | I) \rightarrow (A^{-1} \cdot A | A^{-1} \cdot I) \rightarrow (I | A^{-1}).$$

Se scrie matricea $(A | I)$. Folosind regula dreptunghiului cu împărțirea la pivot, după n pași, matricea A se transformă în matrice unitate, iar în locul matricei I apare matricea inversă A^{-1} .

Inițial se scrie matricea A și prima coloană din matricea unitate, apoi, în primul pas se adaugă coloana a doua din matricea unitate și se suprimă prima coloană obținută în matricea dată A . Se continuă în mod analog și în pasul 2, 3, ..., n .

Exemplu.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & -5/2 & -3/2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7/3 & 1 & -1/3 & 0 \\ -5/3 & -1 & 2/3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1/6 & 5/6 & -7/6 & 0 \\ -1/6 & -1/6 & 5/6 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right) = \frac{1}{6} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \end{array} \right).$$

Verificare. Se constată ușor că:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{6} \left(\begin{array}{ccc} -1 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \frac{1}{6} \left(\begin{array}{ccc} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = I.$$

b. Transformarea în matrice diagonală.

Se pornește tot de la matricea extinsă $(A|I)$. Folosind apoi regula dreptunghiului fără a împărți la pivot, după n pași matricea A se transformă în matricea diagonală D (cu elementele situate pe diagonala principală $d_{ii} \neq 0$ ($d_{ii} = a_{ii}^{(i-1)}$; $i = 1, 2, \dots, n$), iar în locul matricei I apare o matrice $C = (c_{ij})$.

Situația se prezintă astfel:

$$(A|I) \rightarrow \dots \rightarrow (D|C).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{array} \right)$$

Dacă ținem seama de faptul că am aplicat regula dreptunghiului fără a împărți la pivot, matricea C devine egală cu matricea inversă A^{-1} , dacă vom împărți liniile 1, 2, ..., n respectiv la:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \\ a_{22}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ & & & a_{nn}^{(n-1)}. \end{array}$$

Exemplu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 6 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & -6 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -12 & 60 & -84 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1/6 & 5/6 & -7/6 & 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & -1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \frac{1}{6} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \end{array} \right).$$

Elementele situate pe liniile 1, 2, 3 ale matricei C obținută în pasul 3 au fost împărțite respectiv la :

$$a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} = 2.3.12$$

$$a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} = 3.12$$

$$a_{33}^{(2)} = 12.$$

Observații. În [11] am arătat că numărul operațiilor elementare pentru a calcula inversa (A^{-1}) a unei matrice pătrate de ordinul n cu metoda (a) și cu metoda (b) este dat de relațiile :

$$N_a(n) = n^2(4n - 3)$$

$$N_b(n) = n(3n^2 - 4n + 1).$$

Metoda (b) prezintă două mari avantaje :

— Așa cum rezultă din tabela de mai jos unde am calculat diferențele :
 $\Delta(n) = N_a(n) - N_b(n) = n^2(4n - 3) - n(3n^2 - 4n + 1) = n(n - 1)(n + 2)$, metoda (b) este mai puțin laborioasă față de metoda (a).

n	2	3	4	5	...	10	...	20	...	100
Δn	8	30	72	140	...	1 080	...	8 360	...	1 009 800

— Regula dreptunghiului se aplică fără a împărți la pivot, și deci calculul matricei C nu necesită operații cu fracții.

BIBLIOGRAFIE

- [1]. Altăr, M; Rădulescu D. *Un algoritm pentru soluționarea problemelor de transport*; comunicare ținută la sesiunea științifică D.C.S. 1961.
- [2]. Charnes, A; Cooper, W. W. *Management and industrial application of linear programming*, 2 vol. New-York, 1961.
- [3]. Dantzig, B. G. *Application of the simplex method to a transportation problem*, New-York, 1951.
- [4]. Gass, S. I. *Linear programming: methods and application*, New-York, 1958.
- [5]. Lupescu, T., Roșu, Al., Mihu, C. *Programarea matematică*, Editura militară, București, 1965.
- [6]. Malița, M., Zidăroiu, C. *Matematica organizării*. Editura tehnică, București, 1971.
- [7]. Mihăilă, N. *Introducere în programarea liniară*. Editura didactică și pedagogică, București, 1969.
- [8]. Mihoc, Gh., Ionescu, H. *Bazele matematice ale programării liniare*. Editura științifică, București, 1965.
- [9]. Mihoc, Gh., Nădejde, I. *Programarea matematică*, vol. 1—2. Editura științifică, București, 1966.
- [10]. Mihu, C., Nădejde, I., Altăr, M. *Aplicații ale programării liniare în economie*. Editura științifică, București, 1965.
- [11]. Mihu, C. *Metode numerice în algebra liniară*. Editura tehnică 1977.
- [12]. Mihu, C. *O metodă de analiză a prețului de cost*. Revista de statistică, nr. 6, 1959.
- [13]. Mihu, C. *Probleme de optimizare cu aplicații practice*, Editura militară, București, 1970.
- [14]. Mirescu, P., Roșu, Al. *Teoria grafelor*, Editura militară, București, 1968.
- [15]. Onicescu, O. *Despre programarea liniară*. G.M.F., seria A. nr. 8, 1960.
- [16]. Onicescu, O. *Strategia jocurilor cu aplicații la programarea liniară*. Editura Academiei R.S.R., București, 1971.
- [17]. Roșu, Al. *Programarea liniară în învățământul mediu*, G.M.F., seria A, nr. 2, 1963.
- [18]. Tomescu, I. *Metodă pentru determinarea drumului de cea mai mică lungime dintre două noduri ale unui graf finit*. Analele Univ. București, nr. 2, 1966.
- [19]. Tomescu, I. *Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux*. C. R. Acad. Sc. Paris t. 263, 1966.
- [20]. Vodă, V. Gh., Triunghiul — *Ringul cu trei colțuri*. Editura Albatros — București — 1979.

CUPRINS

INTRODUCERE	3
<i>Capitolul I</i>	
Mărimi medii	5
§ 1. Calculul mărimilor medii	5
§ 2. Criteriu pentru aplicarea în practică a mărimilor medii (teoria Chissini—Bojarschi)	19
§ 3. Relații între mărimile medii	24
§ 4. Interpretarea geometrică a mărimilor medii	26
§ 5. Teoreme de maxim și minim, demonstrate cu ajutorul unor relații între mărimile medii	27
<i>Capitolul II</i>	
Probleme de maxim și minim (tratate elementar).	36
§ 1. Probleme de maxim	36
Probleme propuse	42
§ 2. Probleme de minim	45
Probleme propuse	50
<i>Capitolul III</i>	
Calculul variației procentuale a unei sume, produs sau cît de două sau mai multe mărimi variabile	53
§ 1. Variația procentuală a unei sume de două sau mai multe mărimi variabile	53
§ 2. Variația procentuală a unui produs de două mărimi variabile	54
§ 3. Variația procentuală a unui produs de n mărimi variabile	55
§ 4. Variația procentuală a unui cît de două mărimi variabile	56
§ 5. Variația procentuală a unui cît de produse a mai multor mărimi variabile	57
<i>Capitolul IV</i>	
Reprezentări grafice	61
<i>Probleme propuse</i>	75
<i>Capitolul V</i>	
Probleme de maxim și minim	77
<i>Probleme propuse</i>	87
<i>Capitolul VI</i>	
Aplicații ale calculului integral	92
§ 1. Calculul ariilor suprafețelor plane	92
§ 2. Volumul corpurilor de rotație	94
Volumul butoaielor	99
1. Vase cu formă parabolică	99
2. Vase cu formă elipsoidală	100

3. Vase cu formă circulară	100
§ 1. Lungimea graficului unei funcții	103
§ 2. Calculul ariilor suprafețelor de rotație	104
§ 3. Determinarea centrelor de greutate	107
Probleme propuse	111
Prima teoremă a lui Guldin (exemple)	112
A doua teoremă a lui Guldin (exemple)	114

Capitolul VII

Aplicații diverse	117
§ 1. O problemă de croială	117
§ 2. Aplicații ale analizei combinatorii	119
§ 3. Aplicații în topografie	123
§ 4. Metode practice de împărțire a unui unghi în trei părți egale („triseția unghiului”)	127
§ 5. Volumul unor corpuri	129
§ 6. Probleme de interpolare	131

Capitolul VIII

Aplicații ale nomografiei	138
-------------------------------------	-----

Capitolul IX

Programare liniară	157
Introducere	157
§ 1. Modelul matematic al unui program liniar	159
§ 2. Rezolvarea programelor liniare prin „metoda descrierii totale”	161
§ 3. Interpretarea geometrică a programelor liniare	163
§ 4. Algoritmul simplex	182
Probleme propuse	209

Capitolul X

Problema transporturilor	211
§ 1. Enunțul problemei	211
§ 2. Modelul matematic	211
§ 3. Clasificarea soluțiilor	213
§ 4. Determinarea unei soluții inițiale	215
§ 5. Metoda distributivă modificată (A. Charnes și W. Cooper)	218
§ 6. Probleme de transport neechilibrate	226
Probleme propuse	231

Capitolul XI

Grafe	236
§ 1. Concepte legate de orientare	236
§ 2. Concepte legate de neorientare	237
§ 3. Tipuri de grafe	238
§ 4. Drumul cel mai scurt într-un graf	241
§ 5. Drumul de valoare minimă într-un graf	242
§ 6. Drumul de valoare maximă într-un graf	247
§ 7. Relație de ordine strictă într-un graf	250
§ 8. Descompunerea unui graf conex fără circuite în nivele	251
§ 9. Determinarea drumului de valoare optimă între vîrfurile nivelului inițial și final ale unui graf	252
Probleme propuse	253
Anexă	256
BIBLIOGRAFIE	269

Coli de tipar: 17
Format: 16/70×100
Bun de tipar: 25-XI-1982
Ediția: 1982. Nr. de plan: 7195



Întreprinderea Poligrafică Cluj
B-dul Lenin Nr. 146
Municipiul Cluj-Napoca
Republica Socialistă România
Comanda Nr. 273

Lei 22,50

18